Pensamiento Matemático III

COBAO

Nueva
Escuela
Mexicana

DIRECTORIO

Ing. Salomón Jara Cruz

Gobernador Constitucional del Estado Libre
y Soberano de Oaxaca

M.C. Verónica Hernández González

Directora General

M.C.E. Abel Luis Avendaño

Director Académico

Lic. Bene-Ever Miguel Isidro

Director de Supervisión para la Mejora Educativa

L.C.P. Adalberto Medina Casas

Director de Administración y Finanzas

M.B.A. Eduardo Javier Aldana González

Director de Planeación

M.A. Liliana Diaz Cuevas
I.E. César Ernesto Torres Mendoza
Autores

Ing. Eduardo Arango Cruz
Revisor discplinar

lic Erandy Donaji González López
Revisora pedagógica

COBAO

MI LIBRO

Asignatura:

Grupo:

Plantel:

Nombre del docente:

Datos del Estudiante

Nombre completo:

Objetivos del semestre:

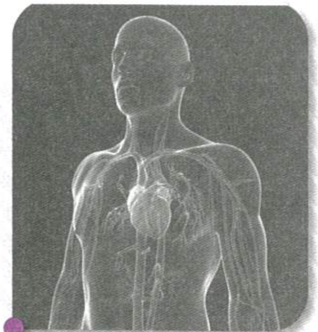
Tus frases del semestre:

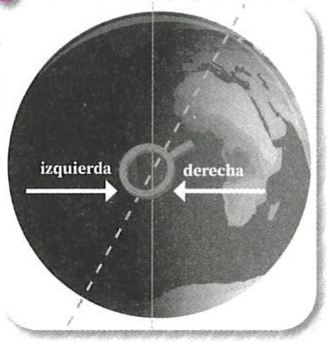
"No estudio para saber más, sino para ignorar menos" - (*Sor Juana Inés de la Cruz*).

ÍNDICE

PROGRESIÓN 5

Conceptualiza





PROGRESIÓN 6

Identifica y contextualiza

PROGRESIÓN 7

Interpreta diferentes perspectivas y métodos

PROGRESIÓN 8

Encuentra de manera heurística

PROGRESIÓN 9

Selecciona una problematica

PROGRESIÓN 10

Explica y socializa

PROGRESIÓN 11

Resuelve problemas de su entorno o de otras áreas del conocimiento

PROGRESIÓN 12

Examina la gráfica

PROGRESIÓN 13

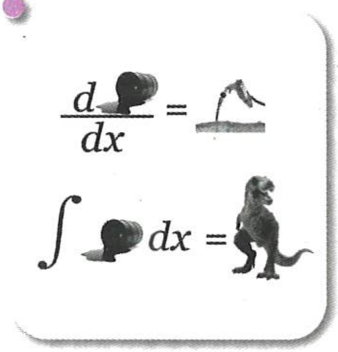
Analiza y describe un fenómeno

PROGRESIÓN 14

Selecciona una problemática, situación o fenómeno

PROGRESIÓN 15

Considera y revisa algunas ideas

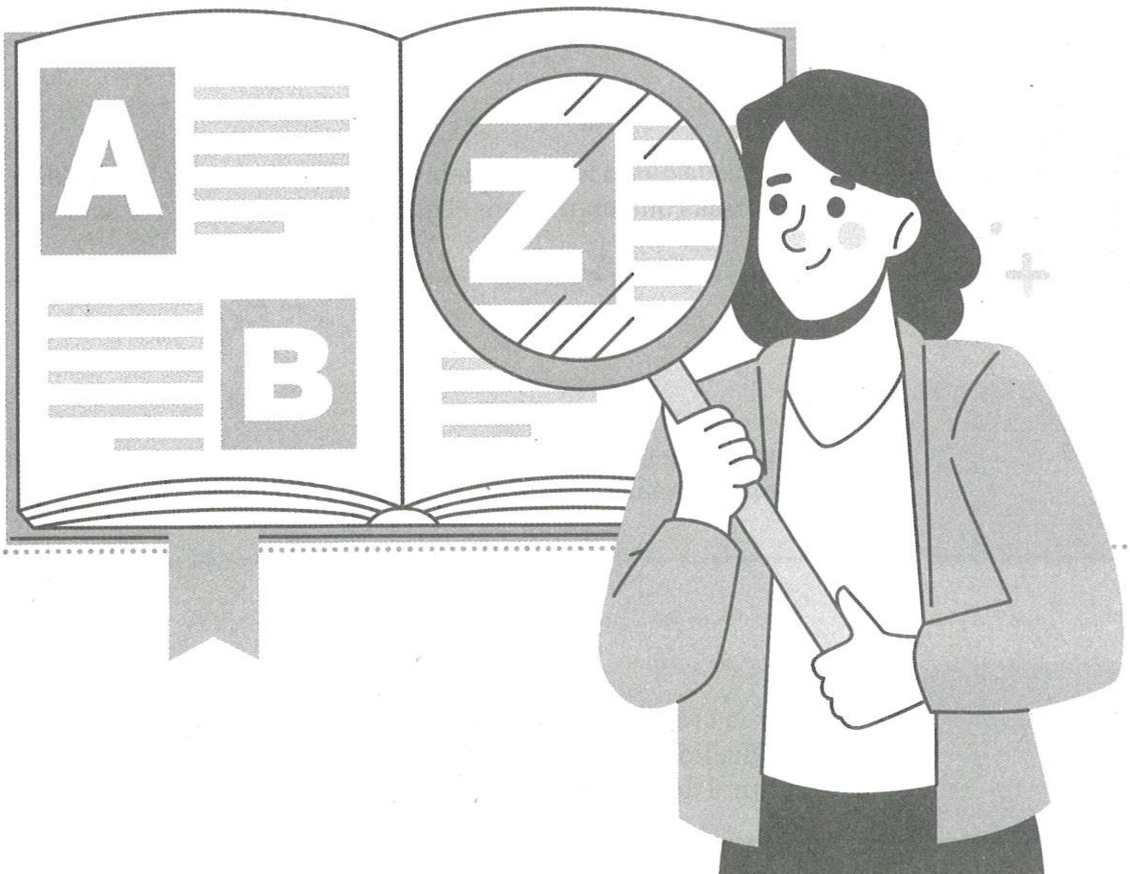


INTRODUCCIÓN

La actualización del Marco Curricular Común bajo el enfoque humanista de la Nueva Escuela Mexicana nos permite visualizar al Pensamiento Matemático como un recurso sociocognitivo que coadyuva al acceso de las diversas áreas del conocimiento y por consiguiente nos abre el abanico de oportunidades para estudiar y analizar los diversos tópicos, para el desarrollo de habilidades y conocimientos donde los jóvenes estudiantes puedan llegar en muchos casos al modelado de la situación y proponer alternativas de solución o abordaje de las mismas.

Bajo la propuesta constructivista establecemos situaciones que permitan al estudiante de tercer semestre utilizar de manera óptima sus conocimientos previos sobre las matemáticas y pueda transferirlos al momento presente en el análisis y solución de problemas planteados utilizando las leyes y principios numérico, algebraicos, geométricos como recurso sociocognitivo en la construcción del pensamiento variacional.

Como experiencia de aprendizaje en todo momento se sugiere la socialización de los aprendizajes y la continua comunicación con tus compañeros y docente para validar los resultados de los ejercicios propuestos en cada una de las quince progresiones que conforman el programa de estudio del presente semestre, donde se abordarán planteamientos enfocado al pensamiento variacional.



VALORES

RESPETO	Reconocer tu propio valor y el valor de los demás, aceptando las virtudes y defectos ajenos así como sus conocimientos, creencias y costumbres.
EQUIDAD	Propiciar igualdad de oportunidades aplicada a todo ser humano sin distingos de raza, condición socioeconómica, condición física o identidad cultural; igualdad que tiene sustento en el valor del respeto y la justicia.
JUSTICIA	Otorgar a cada quien lo que es debido mediante el respeto a los derechos y normas que mantienen el orden y la armonía en la sociedad.
TOLERANCIA	Respetar las ideas, prácticas y creencias de los demás aún cuando sean diferentes a las nuestras.
IDENTIDAD CULTURAL	Expresar la creatividad infinita del ser humano, sin dejar a un lado su individualidad, para que se adscriba a la expresión o manifestación cultural de una comunidad.

HONESTIDAD	Demostrar confianza y respeto donde prevalezca la verdad, la honradez y la justicia.
SUSTENTABILIDAD	Favorecer el uso consciente y responsable de los recursos, sin agotarlos o exceder su capacidad y sin comprometer los de las generaciones venideras.
RESPONSABILIDAD	Dignificar a cada persona cuando cumple las obligaciones que se derivan de sus propios talentos y capacidades en el ámbito escolar, familiar y laboral.
SOLIDARIDAD	Sumarse a una causa común y solucionar problemas en conjunto, sobre todo cuando se trata de los más desprotegidos.
PERSEVERANCIA	Poseer constancia y tesón para llegar a un fin propuesto y pensado con antelación no importando las adversidades propias de los grandes proyectos.

Los 8 principios de la **Nueva Escuela Mexicana**

01 Fomenta la identidad con México

Favorece el amor a la patria, el aprecio de la cultura, historia y valores de nuestro país, respetando la diversidad cultural y de pensamiento.

02 Responsabilidad ciudadana

Impulsa el uso de valores y de los derechos humanos en pro del desarrollo del individuo y de la comunidad.

03 Honestidad

Se enfatiza este valor para desarrollar la confianza y la congruencia dentro de la comunidad.

04 Participación en la transformación de la sociedad

Trabajar de manera conjunta con los miembros de la comunidad y no sólo de manera individual para la resolución de problemas comunes.

05 Respeto a la dignidad humana

Respetar, ejercer y promover los derechos humanos.

06 Interculturalidad

Fomentar el reconocimiento, respeto y aprecio por la diversidad cultural y lingüística que existe en nuestro país.

07 Cultura de la paz

Favorecer la resolución de conflictos mediante el diálogo constructivo que deriven en acuerdos y no a través de la violencia. Promover la solidaridad y la búsqueda de una sociedad pacífica con desarrollo sostenible, inclusiva y con igualdad de oportunidades.

08 Respeto a la naturaleza

Incentivar la conciencia, el conocimiento, la protección y conservación del entorno.

Para más información consulte:
http://cosfac.sems.gob.mx/

ENFOQUE PEDAGÓGICO

El enfoque pedagógico que aquí se propone, coloca al centro del proceso educativo el desarrollo integral de las y los adolescentes y jóvenes que cursan la educación media superior. A través de la transversalidad del conocimiento, recursos sociocognitivos y socioemocionales se logran los aprendizajes de trayectoria; en donde las y los estudiantes adquieren el rol protagónico del proceso educativo, bajo el acompañamiento, orientación y conducción de las y los docentes en consonancia con su nuevo perfil, en el cual se revaloriza y redignifica su función como agente de transformación social.

Este enfoque conduce a la unidad de los ámbitos cognitivo, afectivo-emocional y social del estudiantado, que tiene por objetivo la formación de mujeres y hombres como ciudadanos integrales con la capacidad de aprender a aprender en el trayecto de la vida y sean un aporte para el desarrollo de la sociedad (Arroyo, 2019). Se persigue también, generar en los educandos una reflexión sobre las alternativas de su proyecto de vida, hacerlos conscientes del mundo y de la realidad en que viven; todo ello va construyendo el desarrollo integral de los adolescentes y jóvenes, dejando atrás la antigua concepción sobre su papel en la sociedad, como seres pasivos y vulnerables, que se encuentran inmersos en una condición social de inseguridad que les impide actuar en favor de su transformación y de la sociedad (Revisión MCC 0-23 años, p. 25). El enfoque pedagógico del Marco Curricular Común de la Educación Media Superior (MCCEMS), pretende lograr el desarrollo integral de los educandos, el constructivismo representa así, el camino para la transformación educativa propuesta por la NEM. Se trata de un proceso activo en el que, el estudiantado va construyendo su propio aprendizaje tomando como base conocimientos previos adquiridos en la familia, escuela y su entorno, los cuales les han proporcionado experiencias e interacciones con la sociedad en general y el medio ambiente en el que viven, siendo elementos que abonan a la adquisición de conocimientos nuevos[1]. Lo anterior, se alinea a una de muchas definiciones sobre el modelo constructivista, (Camilloni, 1998, en J. Trilla, 2007) señala que; "el constructivismo debe ser entendido como una unidad de análisis más amplia que una teoría. Correspondería pensarlo como una solución modélica para muchos problemas que tienen que ver con el conocimiento y la enseñanza" (p. 180).

[1] Coll (1997) "Estudios realizados en los campos de la psicología cognitiva, teorías del aprendizaje, psicología instruccional y de la educación, coinciden en que el conocimiento, (...) es un proceso dinámico e interactivo a través del cual la información externa es interpretada por la mente que va construyendo progresivamente modelos cada vez más complejos y potentes."

La idea epistemológica del constructivismo tiene antecedentes histórico-filosóficos, a través de expresiones de; Jenófanes, Sócrates, Platón o Protágoras entre muchos otros, este último expresaba que: "el hombre no conoce las cosas como son en sí, sino como son para él, como él las internaliza en el propio momento de la percepción. Por esto, el conocimiento puede variar en el tiempo para la misma persona, ya que volverá a depender de su nueva percepción" (Araya, Alfaro y Andonegui, 2007. p. 79) Lo anterior nos lleva a reflexionar sobre que el constructivismo no se trata de un enfoque nuevo [acerca] de concebir la educación, estos y otros filósofos ya hablaban sobre el dinamismo de la educación y sobre la forma tan diversa de concebirla para cada persona de acuerdo con sus procesos cognitivos y sus contextos, por lo que el aprendizaje en los sujetos es diferente. Así lo reafirma Gorgias (483-375 a. C.) "conocer es un acto personal, elaborado al interior de cada individuo". Más tarde Descartes ((1596-1650), quien ha sido considerado como iniciador de la corriente constructivista, expresa que "el hombre puede trazarse proyectos de pensamiento, construir sus propias teorías, proponer la verdad de las cosas y sus propiedades (...). Estamos en presencia de un proceso de liberación que convierte al pensamiento en un ente activo" (Araya, Alfaro y Andonegui, 2007).

Asimismo, existen investigaciones y aportaciones sobre el modelo constructivista de teóricos contemporáneos reconocidos, como es el caso del Psicólogo Suizo Jean Piaget, quien dedicó su obra al estudio de la psicología y pedagogía, fundador de la psicología genética y la teoría del desarrollo cognitivo. Piaget pasó mucho tiempo observando "cómo pasa el sujeto de estados de menor conocimiento a estados de mayor conocimiento" (J. Trilla, 2007). Las aportaciones de Piaget, de índole pedagógico fueron muchas y han servido como base para posteriores investigaciones sobre el aprendizaje activo, por lo que es considerado como referente de la corriente constructivista.

En ese mismo sentido se encuentra David Ausbel, psicólogo y pedagogo estadounidense, quien realizó estudios sobre la teoría de la asimilación y el anclaje de conceptos previos que sirven para la adquisición de nuevos conocimientos, se trata de un elemento integrador de saberes que en combinación con estrategias didácticas en el aula que incorporen materiales y recursos que den sentido a lo que el estudiante aprende, dará como resultado el aprendizaje significativo.

Por otra parte, se encuentra Lev Semiónovich Vygotsky, psicólogo ruso quien propone una visión culturalista, es decir que, partiendo de la capacidad actual de los sujetos y la influencia del contexto social y cultural en el que vivan, dependerá el aprendizaje que alcanzarán. Esto es a lo que él llamó "zona de desarrollo próximo", lo cual representa la distancia entre lo que sabe y lo que logrará bajo la guía de un adulto. Podemos

citar también a Bruner (1916-2016) psicólogo, pedagogo constructivista, cognoscitivista, quien establece que "la educación consiste en construir currículos en espiral. Es decir, modos de profundizar más y mejor en un determinado corpus de conocimiento (...)". Indica también, que se puede enseñar cualquier materia a los niños, siempre y cuando se respete su ritmo de aprendizaje y utilizan distintas estrategias (Guilar, 2009)

Como se puede observar, lo establecido en la NEM se apega a las aportaciones pedagógicas de teóricos constructivistas arriba citados, sus ideas en conjunto se encuentran integradas en el rediseño del MCCEMS. Lo que se pretende lograr es que, la comunidad educativa acceda a un aprendizaje activo, el cual se lleve a cabo no solo en el aula, si no fuera de esta, a través de la interacción con la naturaleza de conocer e identificar de manera directa el medioambiente en el que viven las y los estudiantes, es así como lo enuncia Comenio (1592-1671) en Cárdenas Castillo (2004);

> "Por qué en lugar de libros muertos no abrir el libro viviente de la naturaleza (...) Instruir la juventud no es inculcarle un amasijo de palabras, de frases, de sentencias, de opiniones compiladas en los autores, es abrirles el entendimiento por las cosas".

En ese sentido, uno de los elementos que integran el MCCEMS es la "Escuela Abierta y Orientadora", que a través de los recursos socioemocionales y los cinco ámbitos de formación socioemocional, la SEMS, propone el *Programa Aula-Escuela-Comunidad,* el cual es un instrumento organizado y conformado por cada docente y consiste en el conjunto de actividades y acciones que serán construidas y aplicadas teniendo como referente las progresiones de las UAC. El programa de trabajo aula, escuela y comunidad será una guía orientadora que permitirá la Autonomía en la didáctica respecto al desarrollo y adición de acciones y propuestas en el marco de las progresiones de los recursos sociocognitivos, áreas de acceso al conocimiento, y ámbitos de la formación socioemocional, de acuerdo con su práctica en el aula y la comunidad.

Tomado de: Rediseño del Marco Curricular Común de la Educación Media Superior 2019-2022 (pp. 61-63).

Elementos del Marco Curricular Común de la Educación Media Superior

Currículum fundamental

Recursos sociocognitivos:

- Lengua y comunicación
- Pensamiento matemático
- Conciencia histórica
- Cultura digital

Áreas de conocimiento:

- Ciencias naturales, experimentales y tecnología
- Ciencias sociales
- Humanidades

Currículum ampliado

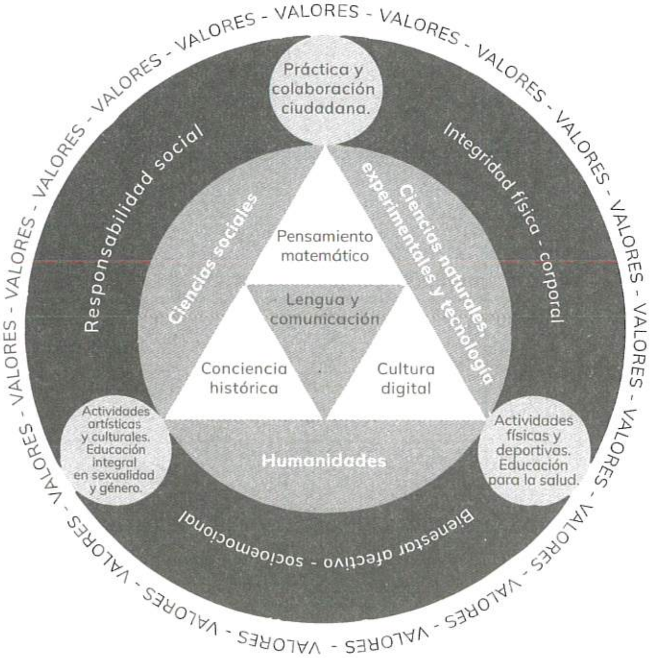
Recursos socioemocionales:

- Responsabilidad social
- Cuidado físico corporal
- Bienestar emocional afectivo

Ámbitos de formación socioemocional:

- Práctica y colaboración ciudadana
- Educación integral en sexualidad y género
- Actividades físicas y deportivas
- Actividades artísticas y culturales
- Educación para la salud

- Categorías, subcategorías, conceptos centrales y transversales
- Metas de aprendizaje
- Aprendizajes de trayectoria - Perfil de ingreso y egreso



PROGRESIONES

PROGRESIÓN 1

Analiza de manera intuitiva algunos de los problemas que dieron origen al cálculo diferencial, en particular el problema de determinar la recta tangente a una curva en un punto dado.

PROGRESIÓN 2

Analiza de manera intuitiva algunos de los problemas que dieron origen al cálculo diferencial, en particular el problema de determinar la recta tangente a una curva en un punto dado.

PROGRESIÓN 3

Revisa situaciones y fenómenos donde el cambio es parte central en su estudio, con la finalidad de modelarlos aplicando algunos conocimientos básicos de funciones reales de variable real y las operaciones básicas entre ellas.

PROGRESIÓN 4

Analiza la gráfica de funciones de variable real buscando simetrías, y revisa conceptos como continuidad, crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos relativos, concavidades, entre otros, resaltando la importancia de éstos en la modelación y el estudio matemático.

PROGRESIÓN 5

Conceptualiza el límite de una función de variable real como una herramienta matemática que permite comprender el comportamiento local de la gráfica de una función.

PROGRESIÓN 6

Identifica y contextualiza la continuidad de funciones utilizadas en la modelación de situaciones y fenómenos y hace un estudio, utilizando el concepto de límite, de las implicaciones de la continuidad de una función tanto dentro del desarrollo matemático mismo, como de sus aplicaciones en la modelación.

PROGRESIÓN 7

Interpreta, a partir de integrar diferentes perspectivas y métodos, el concepto central del cálculo diferencial, "la derivada", de forma intuitiva e intenta dar una definición formal, así como la búsqueda heurística para encontrar la derivada de la función constante, lineal y algunas funciones polinomiales.

APRENDIZAJES DE TRAYECTORIA

Los aprendizajes de trayectoria que se desarrollan a lo largo de las UAC responden a las preguntas ¿qué tipo de persona pretendemos formar? y ¿en qué contribuye el área o recurso en la formación integral de las y los jóvenes que cursen este tipo educativo?

Los aprendizajes de trayectoria de Pensamiento Matemático describen la formación que buscamos ofrecer a las y los estudiantes que cursen por el MCCEMS, la cual pretende aportar herramientas y habilidades, como lo son la capacidad para observar, intuir, conjeturar, argumentar, modelar, entre otras, que les serán de utilidad sin importar el derrotero que sea elegido al terminar el bachillerato.

El perfil de egreso de las y los estudiantes, en el Recurso Sociocognitivo de Pensamiento Matemático queda referido en el currículum bajo los siguientes aprendizajes de trayectoria:

1. Valora la aplicación de procedimientos automáticos y algorítmicos, así como la interpretación de sus resultados, para anticipar, encontrar y validar soluciones a problemas matemáticos, de áreas del conocimiento y de su vida personal.

2. Adopta procesos de razonamiento matemático tanto intuitivos como formales tales como observar, intuir, conjeturar y argumentar, para relacionar información y obtener conclusiones de problemas (matemáticos, de las ciencias naturales, experimentales y tecnología, sociales, humanidades, y de la vida cotidiana).

3. Modela y propone soluciones a problemas tanto teóricos como de su entorno, empleando lenguaje y técnicas matemáticas.

4. Explica el planteamiento de posibles soluciones a problemas y la descripción de situaciones en el contexto que les dio origen empleando lenguaje matemático y lo comunica a sus pares para analizar su pertinencia.

PROGRESIÓN 8

Encuentra de manera heurística algunas reglas de derivación como la regla de la suma, la regla del producto, la regla del cociente y la regla de la cadena y las aplica en algunos ejemplos.

PROGRESIÓN 9

Selecciona una problemática en la que el cambio sea un factor fundamental en su estudio para aplicar el concepto de la derivada como razón de cambio instantánea.

PROGRESIÓN 10

Explica y socializa el papel de la derivada para analizar una función (donde crece/decrece, máximo/mínimos locales, concavidades) y traza su gráfica.

PROGRESIÓN 11

Resuelve problemas de su entorno o de otras áreas del conocimiento empleando funciones y aplicando la derivada (e.g. problemas de optimización) organiza su procedimiento y lo somete a debate.

PROGRESIÓN 12

Examina la gráfica de funciones logarítmicas con diferentes bases y las gráficas de las funciones exponenciales para describirlas y realizar afirmaciones sobre el significado de que la función exponencial y logarítmicas de base "a" sean funciones inversas entre sí.

PROGRESIÓN 13

Analiza y describe un fenómeno en el que la periodicidad sea un constituyente fundamental a través del estudio de propiedades básicas funciones trigonométricas.

PROGRESIÓN 14

Selecciona una problemática, situación o fenómeno tanto real como ficticio para modelarlo utilizando funciones derivables.

PROGRESIÓN 15

Considera y revisa algunas ideas subyacentes al teorema fundamental del cálculo.

PROGRESIÓN 1

Genera intuición

HORAS: 3

...sobre conceptos como variación promedio, variación instantánea, procesos infinitos y movimiento a través de la revisión de las contribuciones que desde la filosofía y la matemática hicieron algunas y algunos personajes históricos en la construcción de ideas centrales para el origen del cálculo.

Metas

M1 Observa y obtiene información de una situación o fenómeno para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a entenderlo.

Categorías, conceptos transversales

C2 Procesos de intuición y razonamiento.

Subcategorías, conceptos cientificos asociados

S1 Capacidad para observar y conjeturar.

APERTURA

Pensamiento variacional

Reto educativo

Instrucciones: de manera individual, lee el siguiente texto y responde a las preguntas.

La flecha de Zenón y la historia del infinito

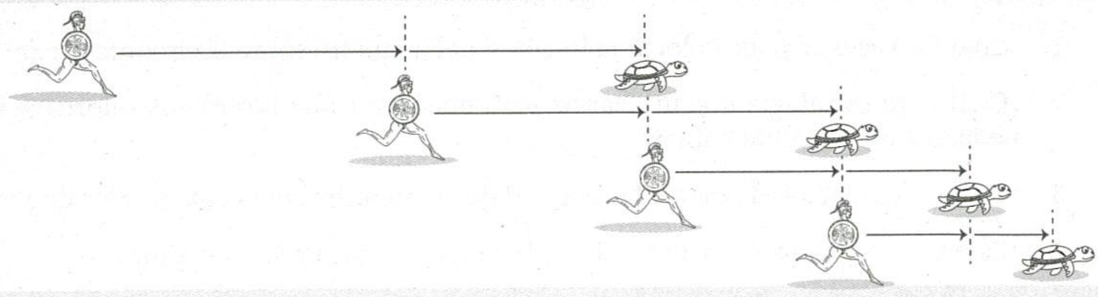
(Fragmento)

La de **Aquiles y la tortuga** es otra de las aporías de Zenón que se explican en *Historia del infinito*. En esta ocasión, el filósofo y matemático propone una carrera entre el héroe Aquiles y una tortuga. Viendo la inferioridad de condiciones de uno y otra, se le da ventaja al animal y sale un poco antes que Aquiles. Empieza la carrera. Como la tortuga salió antes, a Aquiles le toma un tiempo llegar al lugar del que esta salió. Y en ese mismo momento, el animal ha continuado su avance hacia la meta. Zenón nos propone repetir este proceso. De nuevo, Aquiles tardará un determinado período de tiempo en llegar al sitio donde está la tortuga y otra vez, en ese lapso de tiempo, el animal habrá seguido moviéndose hacia la meta. La conclusión es que el héroe de la Guerra de Troya **jamás conseguirá alcanzar la tortuga**, pues cuando llegue al sitio donde esta se encontraba, ella ya se habrá movido de ahí.

Aguilar, M. (2023). La flecha de Zenón y la historia del infinito. Muy Interesante. https://www.muyinteresante.com/ciencia/59825.html

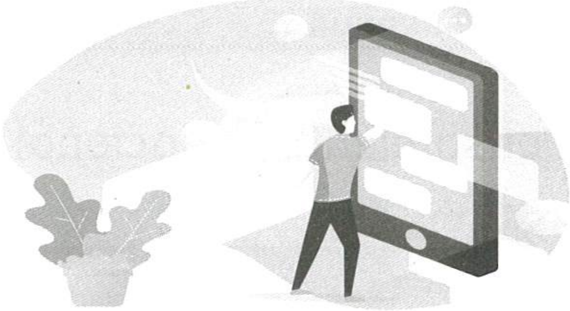
Según el texto, comenta con tus compañeros:

1. ¿Qué sucede con Aquiles que no llega a alcanzar a la tortuga?
2. ¿Cómo explicarías este suceso?



Tesoro digital

Consulta el QR sugerido de Universum, relacionado a la paradoja.



Reto educativo

Explorando a Pi en nuestro planeta

Instrucciones: con tu docente, realiza los acuerdos sobre los criterios de evaluación para trabajar y para revisar tus ejercicios de esta guía de estudio.

Pi (π) es un valor que todos conocemos como 3.1415 y muchos decimales más. Para calcular su valor aproximado vamos a medir la longitud de cualquier circunferencia utilizando el largo de su diámetro.

Utiliza una cinta o un pedazo de hilo para tomar la longitud del diámetro, posteriormente coloca dicha longitud sobre el contorno de la tierra. En realidad no necesitas medir con exactitud el diámetro, basta con tomar la distancia de un punto a otro.

Contesta lo siguiente. Al finalizar comenta con tus compañeros tus cálculos para que tu docente los apoye en coincidir con las respuestas adecuadas.

1. ¿Cuántas veces se pudo colocar la longitud del diámetro sobre la circunferencia?
2. ¿Cuál es la estrategia que utilizarías para encontrar algunos de los valores del pedazo que hace falta cubrir?
3. ¿Cuál es la relación de medir la longitud de la circunferencia con el valor de Pi?
4. ¿Este proceso aplica para otras circunferencias de diferente tamaño?

DESARROLLO

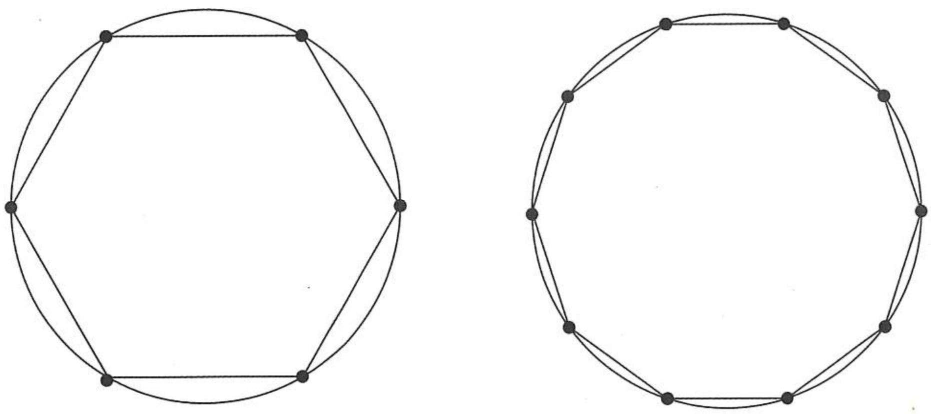
Procesos infinitos

Volviendo a la paradoja de Zenón, descubrimos que siempre habrá un espacio infinito más por avanzar.

Para ello presentamos otro caso, sobre cómo calcular el área de un círculo utilizando polígonos inscritos de n cantidad de lados. Al trazar un polígono de n lados inscrito en el círculo hasta cubrir la máxima área, podrás notar que se vuelve infinito este proceso pues siempre habrá un lado más por colocar. Entonces nos acercamos al área del círculo, a este método se le llamó Método exhaustivo, propuesto por Eudoxo en el siglo IV a. C.

¿Qué tendrá que ver Arquímedes y la cuadratura del círculo?

Jugar con los polígonos dentro del círculo nos permite observar el comportamiento y posteriormente modelar la situación planteada.



Tesoro digital

Para complementar la información revisa el siguiente link del QR, donde podrás observar la historia de Pi y las series infinitas.

Variación y razón de cambio

Una razón de cambio es la relación entre dos cantidades de magnitud que se pueden interpretar en un planteamiento situacional, dado que una variable depende de la otra.

Además del pensamiento variacional, podemos decir que nos sirve para modelar este mundo en continuo cambio mediante un enfoque dinámico pues se involucran otros tipos de pensamiento matemático, tal como el espacial, numérico, aleatorio y métrico.

Reto educativo 1

Dormir para vivir

Instrucciones: trabaja en pares, conversa en todo momento con tu docente para aclarar tus dudas.

Sabías que...

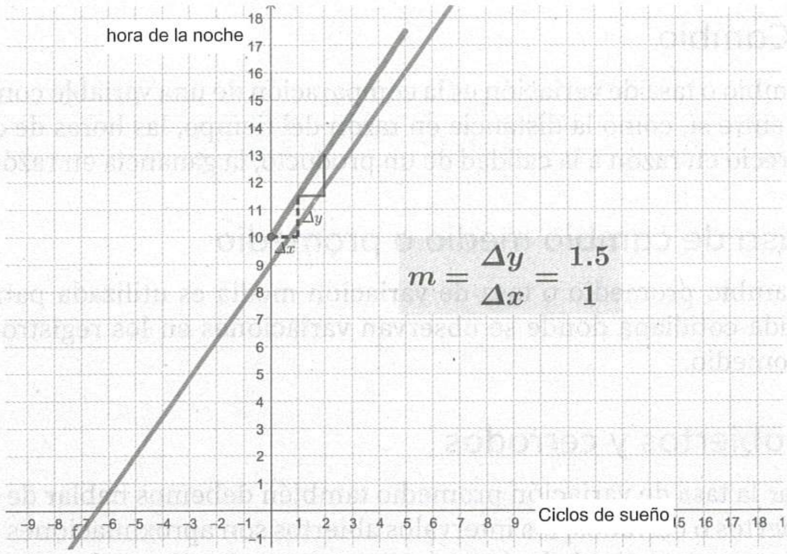
para tener un adecuado desempeño académico diariamente es necesario tener hábitos de sueño saludables, organizar nuestros horarios de trabajo y nuestros horarios de descanso.

Dormir es toda una ciencia ya que nos permite tener un adecuado desarrollo físico, un fortalecimiento intelectual y que nuestro sistema inmunológico se encuentre fortalecido, además de conservar un equilibrio emocional.

Dormir está constituido por ciclos y fases donde ocurre todo lo anterior.

Analicemos la recomendación de dormir 8 horas diarias.

Un ciclo de sueño dura aproximadamente 90 min, que equivale a 1.5 horas de sueño. Si la hora de dormir fue 10 pm y cumple su primer ciclo una hora y media después, la gráfica se representa de la siguiente manera.



Construir una tabla ayuda al cálculo de la variación promedio:

Ciclos	0	1	2	3	4	5
Hrs	10 pm	11.5 pm	1.0 am	2.5 am	4.0 am	5.5 am

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{11.5-10}{1-0} = \frac{1.5}{1} = 1.5$$

Donde:

Δy se denomina variación o incremento de y

Δx se denomina variación o incremento de x

Contesta las preguntas en tu libreta y posteriormente comparte tus conclusiones.

a. ¿A qué hora se despertó si durmió 5 ciclos completos?

b. ¿Cómo interpretas la razón de cambio $m = \frac{1.5}{1}$?

c. Dada tu experiencia del semestre pasado con el contenido de pendiente, ¿qué significan los cálculos que observas en la gráfica?

d. Con respecto al análisis que acabas de concluir, ¿cuál es tu aportación a la recomendación de dormir 8 horas diarias?

La información que recibes, con respecto a la ciencia de dormir, puede ayudarte a organizar tus ciclos de sueño y descansar con mayor eficacia, mejorando tu rendimiento académico. Te retamos a que hagas tus cálculos personales y puedas organizar tus ciclos de sueño.

Razón de Cambio

La razón de cambio o tasa de variación es la comparación de una variable con otra con la que tiene relación entre sí, como la distancia en razón del tiempo, las horas de correr en razón al tiempo, el precio en razón a la calidad de un producto, la ganancia en razón de las ventas.

Razón o tasa de cambio medio o promedio

La razón de cambio promedio o tasa de variación media es utilizada para revisar situaciones de la vida cotidiana donde se observan variaciones en los registros y se requiere calcular un promedio.

Intervalos abiertos y cerrados

Para considerar la tasa de variación promedio también debemos hablar de intervalos, que pueden ser abiertos o cerrados; los intervalos abiertos son aproximaciones infinitesimales sin llegar a tocar con exactitud el número, mientras que los intervalos cerrados significan que se aborda el número sugerido como tal.

Un intervalo es un subconjunto de la recta numérica que contiene a los valores sugeridos, va desde un valor ***a*** a otro llamado ***b***

Intervalo	Notación	Desigualdad	Representación gráfica
Abierto	(a,b)	$a<x<b$	
Cerrado	$[a,b]$	$a \leq x \leq b$	

Ejemplo 1

Calcular la tasa de variación (TV) y la tasa de variación media (TVM) para el intervalo cerrado sugerido.

$$f(x)=x-5 \text{ para } [6,\ 9]$$

Un intervalo cerrado significa que se toma con exactitud a los valores asignados.

1. Para la tasa de variación se sustituyen los valores del intervalo [6,9] en la función *f*:

$$TV[a,b]=f(b)-f(a)$$

$$TV[6,9]=f(9)-f(6)=(9-5)-(6-5)=4-1=3$$

2. Para la tasa de variación media, se utiliza la siguiente expresión:

$$TVM[a,b]=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$TVM[6,9]=\frac{f(9)-f(6)}{9-6}=\frac{3}{9-6}=\frac{3}{3}=1$$

Reto educativo 2

Instrucciones: en tu libreta realiza las propuestas de planteamiento y compara con tus compañeros. Comparte tus procesos de solución y con ayuda de tu docente revisa las respuestas hasta solventar tus dudas.

Utiliza GeoGebra para apoyarte en la construcción de las gráficas correspondientes.

1. Rendimiento de combustible en un auto.

Cuando se planea comprar un automóvil se toman en consideración varias características como las siguientes: si va a ser usado en carretera o en ciudad, el color, el modelo, la marca, los interiores, el equipamiento, el costo; sin embargo, un punto importante es el rendimiento de combustible por kilómetro.

Modelos de menor gasto de combustible en México

Categoría	Marca	Modelo	Transmición	Rendimiento Ciudad (km/l)
Subcompacto	SUZUKI	Ignis	Manual	19.80
	SUZUKI	Swift	Manual	18.80
	CHEVROLET	Spark	Manual	18.96
	CHEVROLET	Beat	Manual	18.05
	CHEVROLET	Aveo	Manual	17.38
	SUZUKI	Ciaz	Automática	17.20
	CHEVROLET	Cavalier	Automática	16.59
	CHEVROLET	Cruze	Manual	16.45
	HYUNDAI	Elantra	Manual	15.68
	TOYOTA	Corolla	CVT	15.61
	MAZDA	CX-9	Automática	18.80
	SUZUKI	Vitara	Automática	15.80
	MAZDA	CX-3	Automática	15.50
	SUZUKI	S-Cross	Automática	15.40
	FORD	Ecosport	Manual	15.02

Fuente: Instituto Nacional de Ecología y Cambio Climático.
*Solo se tomaron modelos 2018-2019.
* km/l = kilómetros que recorre un auto por cada litro de gasolina que consume.

Vamos a revisar una propuesta de un auto subcompacto de transmisión manual disponible en el mercado, al que llamaremos SSk. Su rendimiento en ciudad es de 19.8 litros por kilómetro. Consideremos que recorrerá 45 km al día.

a. Construye una gráfica que pueda representar este rendimiento y compara con una tabla donde puedas observar el gasto de gasolina por día, durante cinco días.

b. ¿Cómo te ayudaría a decidir la compra de un auto considerando esta información?

2. Dadas las funciones, calcula la tasa de variación media en los intervalos propuestos.

a. $f(x)=x+5$, para [1, 3]

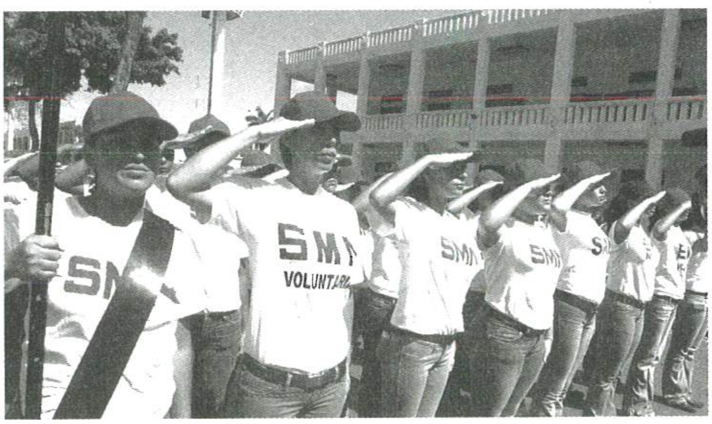
b. $g(x)=x^2-3$, para [2,5]

3. En los requisitos para ingreso al Colegio Militar está la condición física, una de las pruebas es la carrera. Entonces es necesario trabajar en un buen entrenamiento que te permita desempeñarte adecuadamente dentro de los estándares solicitados para tu prueba física.

En la tabla pueden observarse los registros de los minutos de entrenamiento y los kilómetros recorridos en cinco días de la semana.

Día	D1	D2	D3	D4	D5
Km	10 km	5	10	5	10
Tiempo	55 min	30 min	52 min	35 min	56 min

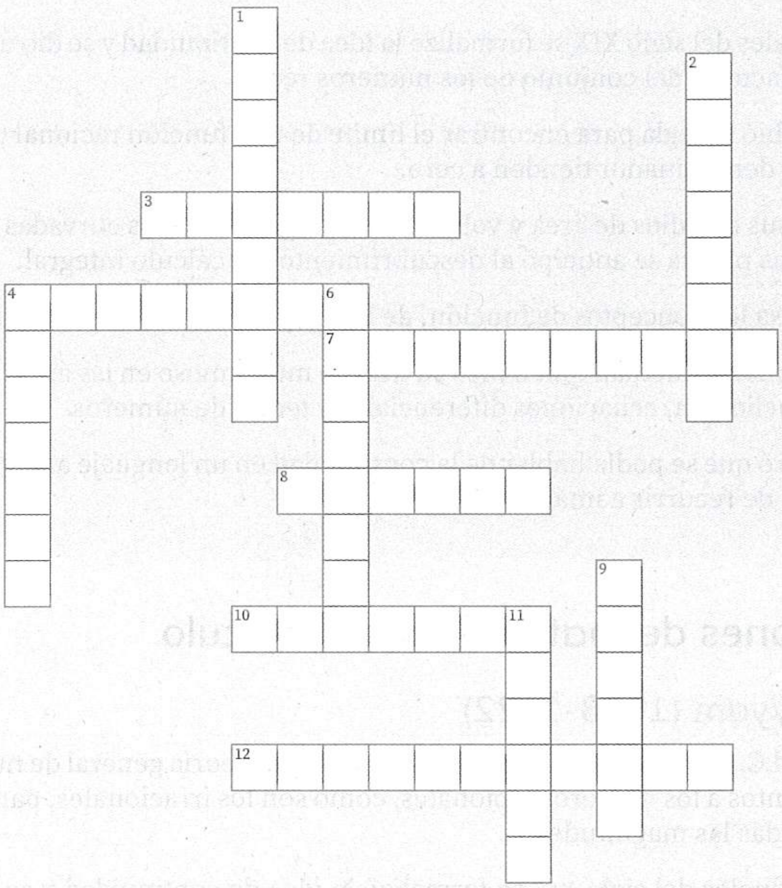
En este momento la intervención de tu docente es importante para determinar la diferencia entre razón de cambio promedio e instantánea, y para ayudarte en la concreción de tu conclusión.



CIERRE

Reto educativo

Daremos un repaso por los antecedentes históricos de aportaciones a las matemáticas y sus estudiosos. Resuelve el crucigrama con información que encontrarás en las siguientes páginas, realiza un acuerdo de criterios con tu docente para revisar la actividad y comenta tu experiencia.



Verticales

1. Gracias al sistema de coordenadas cartesianas, creadas por Descartes, diversas áreas de las matemáticas tuvieron un rápido desarrollo en los años posteriores.
2. Su obra más importante es un tratado de geometría y aritmética denominado *Los Elementos*.
4. Trató de ampliar el cálculo al desarrollar reglas y notación formal.

6. El teorema del valor medio fue demostrado por primera vez por el famoso matemático.
9. En cartas a sus amigos, escribió muchas de las ideas fundamentales del cálculo, mucho antes que Newton o Leibniz.
11. El método de fluxiones, como él lo llamó, estaba basado en su crucial visión de que la integración de una función era el procedimiento inverso de su derivación.

Horizontales

3. A finales del siglo XIX se formalizó la idea de continuidad y se dio una definición satisfactoria del conjunto de los números reales.
4. Escribió la regla para encontrar el límite de una función racional cuyo numerador y denominador tienden a cero.
7. Con sus estudios de área y volúmenes de figuras sólidas curvadas y de áreas de figuras planas se anticipó al descubrimiento del cálculo integral.
8. Precisa los conceptos de función, de límite y de continuidad en la forma actual.
10. Matemático alemán quien hizo su trabajo más famoso en las áreas de geometría no euclidiana, ecuaciones diferenciales y teoría de números.
12. Mostró que se podía hablar de la continuidad en un lenguaje analítico, sin necesidad de recurrir a imágenes geométricas.

Aportaciones de matemáticos al cálculo

Omar Khayyam (1048-1122)

Para el siglo X d.C., el matemático y poeta estableció una teoría general de número y añadió algunos elementos a los números racionales, como son los irracionales, para que pudieran ser medidas todas las magnitudes.

Sólo a finales del siglo XIX se formalizó la idea de continuidad y se dio una definición satisfactoria del conjunto de los números reales; los trabajos de Cantor, Dedekind, Weierstrass, Heine y Meray, entre otros, destacan en esta labor.

Euclides (300 a.C.)

Su obra más importante es un tratado de geometría y aritmética denominado *Los Elementos* que consta de 13 libros. Euclides recopila, ordena y argumenta los conocimientos geométricos-matemáticos de su época.

Los libros del VII al IX tratan de la teoría de números (aritmética), discuten relaciones con números primos (prueba en un teorema que no hay una cantidad finita de números primos), mínimo común múltiplo, progresiones geométricas, etc.

El libro V trata la teoría de proporciones que se aplica en el libro VI, donde ofrece cinco definiciones y treinta y tres proposiciones para demostrar teoremas relativos a razones y proporciones que se presentan al estudiar triángulos, paralelogramos y otros polígonos semejantes.

Pierre de Fermat (1601-1665 d.C.)

Matemático francés quien con Descartes establece la geometría analítica, cada uno haciendo aportaciones. En cartas a sus amigos escribió muchas de las ideas fundamentales del cálculo, mucho antes que Newton o Leibniz. Por ejemplo, el teorema de máximos y mínimos.

Arquímedes (287-212 a.C.)

Matemático y geómetra griego a quien se considera el mayor científico y matemático de la Antigüedad. Entre sus legados destacan el principio de Arquímedes, sus aportes a la cuadratura del círculo, el estudio de la palanca, el tornillo de Arquímedes, la espiral de Arquímedes y la relación aproximada que existe entre la longitud de la circunferencia y su diámetro, lo que dio origen al número π (pi).

Con sus estudios de área y volúmenes de figuras sólidas curvadas y de áreas de figuras planas se anticipó al descubrimiento del cálculo integral.

René Descartes (1596-1650)

Filósofo y matemático francés. Entre sus principales aportes a la filosofía está el famoso *Discurso del método*. Afirmó que los orígenes de esta obra filosófica estaban en la lógica, la geometría y el álgebra. En su *Discurso del método* añadió un anexo titulado "Geometría", en el cual propuso un sistema nuevo para estudiar esta disciplina. Gracias al sistema de coordenadas cartesianas, creadas por Descartes, diversas áreas de las matemáticas tuvieron un rápido desarrollo en los años posteriores.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

El cálculo diferencial surgió casi simultáneamente en dos formas diferentes: en la forma de teoría de fluxiones de Newton y bajo la forma del cálculo de diferenciales de Leibniz. Sin embargo, fue Leibniz quien trató de ampliar el cálculo al desarrollar reglas y notación formal.

Karl Weierstrass (1815-1897)

En 1972, publica con apoyo de su discípulo Paul Du Bois Reymmond su teorema sobre la existencia de funciones continuas que en algunos puntos no tenía derivada. Las consecuencias de este teorema fueron de gran interés, en su época se decía que una función era continua si su gráfica se podía trazar sin despegar el lápiz del papel, aún en nuestra época esto da una idea informal de la continuidad de una función. El resultado de Weierstrass mostró que se podía hablar de la continuidad en un lenguaje analítico, sin necesidad de recurrir a imágenes geométricas.

Sir Isaac Newton (1643-1727)

En un periodo de menos de dos años, cuando Newton tenía cerca de de 25 años, comenzó con avances revolucionarios en matemáticas, óptica, física y astronomía.

Mientras Newton estaba en casa (debido a una peste que cerró la Universidad de Cambribge) estableció las bases del cálculo diferencial e integral. El método de fluxiones, como él lo llamó, estaba basado en su crucial visión de que la integración de una función era el procedimiento inverso de su derivación.

Al considerar a la derivación como la operación básica, Newton produjo sencillos métodos analíticos que unificaban muchas técnicas diferentes desarrolladas previamente para resolver problemas, en apariencia no relacionados, como calcular áreas, tangentes, longitud de curvas y las máximos y mínimos de funciones.

Guillaume Francois Antoine marqués de L'Hôpital (1661-1704)

L'Hôpital fue un excelente matemático, escribió su primer libro de cálculo en 1696 con una influencia muy fuerte de sus profesores Johann Bernoulli, Jacob Bernoulli y Leibniz. Para 1692 su fama estuvo basada en su *libro Analyse des Infiniment petits pour I'intelligence des lignes courbes*. En este libro publicó la regla que ahora se conoce como regla de L'Hôpital, para encontrar el límite de una función racional cuyo numerador y denominador tienden a cero.

George Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866)

Matemático alemán. Hizo su trabajo más famoso en las áreas de geometría no euclidiana, ecuaciones diferenciales y teoría de números. Realizó contribuciones en análisis y geometría diferencial. Su nombre está conectado con la función zeta, la integral de Riemann, el lema de Riemann, las variedades de Riemann, las superficies de Riemann y la geometría de Riemann.

Joseph Louis Lagrange (1736-1813)

Uno de los científicos matemáticos y físicos italianos más importantes de finales del siglo XVII. Inventó y maduró el cálculo de variaciones. El teorema del valor medio fue demostrado por primera vez por el famoso matemático.

Otro aporte central de Lagrange fueron los fundamentos del cálculo. En un libro de 1797 enfatizó la importancia de la serie de Taylor y el concepto de función. Sus trabajos sirvieron de base para los de Augustin Cauchy, Niels Henrik Abel y Karl Weierstrass en el siguiente siglo.

Augustin Louis Cauchy (1789-1857)

Precisó los conceptos de función, de límite y de continuidad en la forma actual, tomó el concepto de límite como punto de partida del análisis y eliminó de la idea de función toda referencia a una expresión formal algebraica, para fundarla sobre la noción de correspondencia.

Cerramos con esta imagen, en la cual nos identificamos como observadores de todo aquello que nos rodea y, por consecuencia aplicamos el pensamiento variacional para intentar modelar algunas de las situaciones según el comportamiento que presenten.

No estudiaremos el cálculo infinitesimal como tal, pero sí nos acercaremos a diversas situaciones que le dieron origen y que nos van a preparar para comprender el comportamiento de nuestro entorno.

PROGRESIÓN 2

Analiza de manera intuitiva

HORAS: 4

...algunos de los problemas que dieron origen al cálculo diferencial, en particular el problema de determinar la recta tangente a una curva en un punto dado.

Metas	Categorías, conceptos transversales	Subcategorías, conceptos cientificos asociados
M1 Aplica procedimientos, técnicas y lenguaje matemático para la solución de problemas propios del Pensamiento Matemático, de Áreas de Conocimiento, Recursos Sociocognitivos, Recursos Socioemocionales y de su entorno.	**C3** Solución de problemas y modelación.	**S3** Estrategias heurísticas y ejecución de procedimientos no rutinarios.
M1 Describe situaciones o fenómenos empleando rigurosamente el lenguaje matemático y el lenguaje natural.	**C4** Interacción y lenguaje matemático.	**S2** Negociación de significados.

APERTURA

Ya que se estudiaba a las rectas y a la variación lineal, de pronto se presentaba un nuevo reto: estudiar las curvas, es decir, el planteamiento de la variación no lineal.

Por lo tanto, uno de los problemas que originó el cálculo radicó en cómo estudiar las curvas, la gran respuesta fue a través de las rectas.

Este problema indica que debemos encontrar una recta tangente en un punto cualquiera de una curva. Para esto, empecemos por la siguiente cuestión:

Flash educativo

La etimología de la palabra tangente se deriva del latín "tangens", que quiere decir "tocar".

¿Qué entiendes por recta tangente?

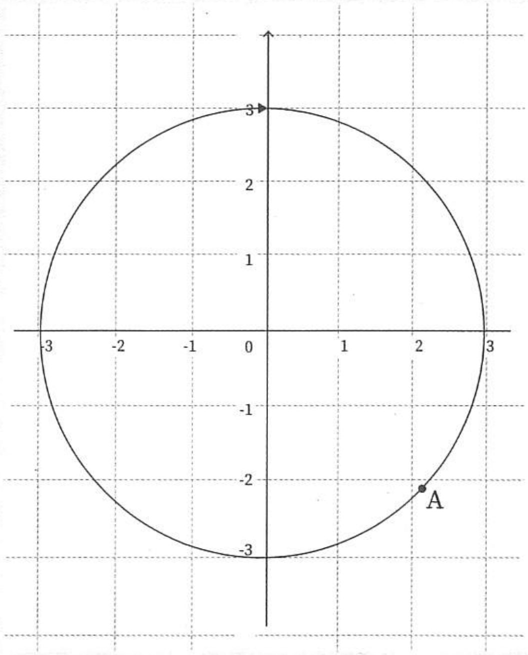
Entonces... ¿Qué va a tocar?

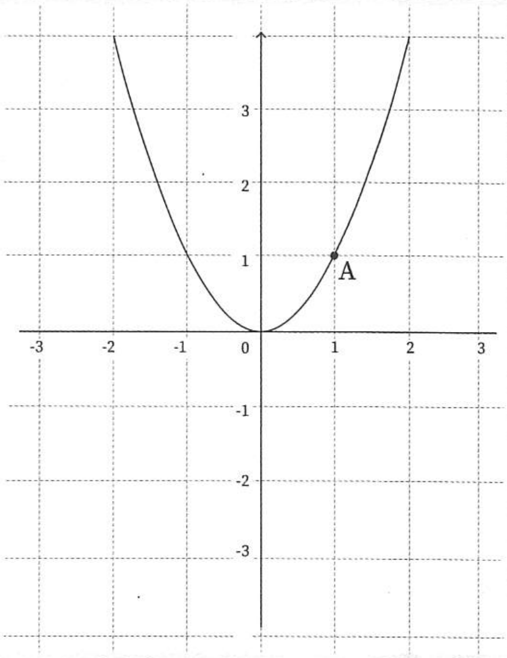
¡VA A TOCAR A LA CURVA, EN UN PUNTO!

Reto educativo

Instrucciones: trabaja sobre las imágenes de la guía, requieres una escuadra y tu lápiz.

a. Te presentamos un par de curvas, en ellas traza la tangente en el punto indicado con tu escuadra.





Reflexiona y contesta lo siguiente:

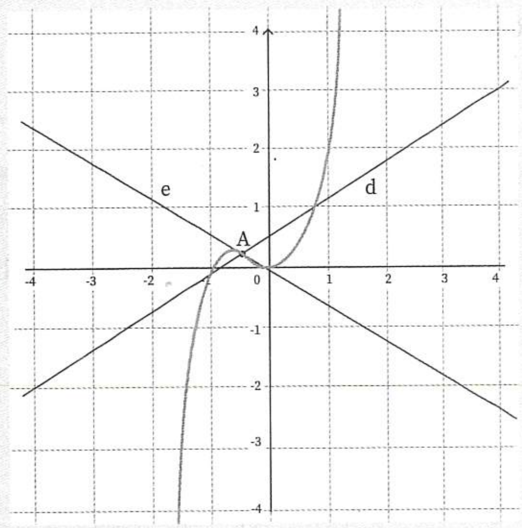
¿Resultó fácil trazar las tangentes a cada curva?
¿Cuáles fueron los criterios que consideraste para trazar las tangentes?

Es necesario que le preguntes a tu docente los criterios para trazar la recta tangente. Una vez que hayas planteado con tu docente los criterios para trazar la recta tangente podrás responder a la siguiente pregunta, observando y revisando las gráficas que se te muestran.

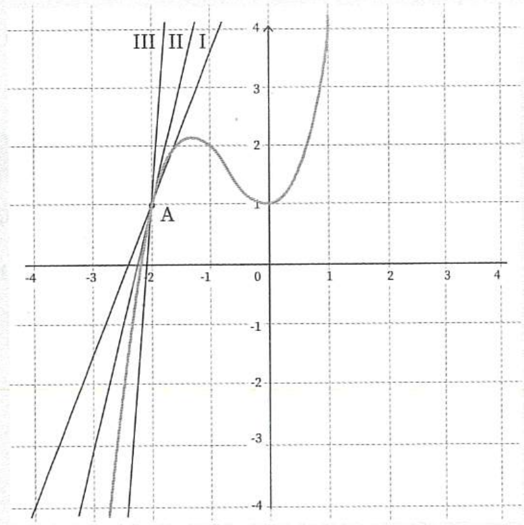
¿Cuál crees que es la recta tangente a la curva en el punto dado?

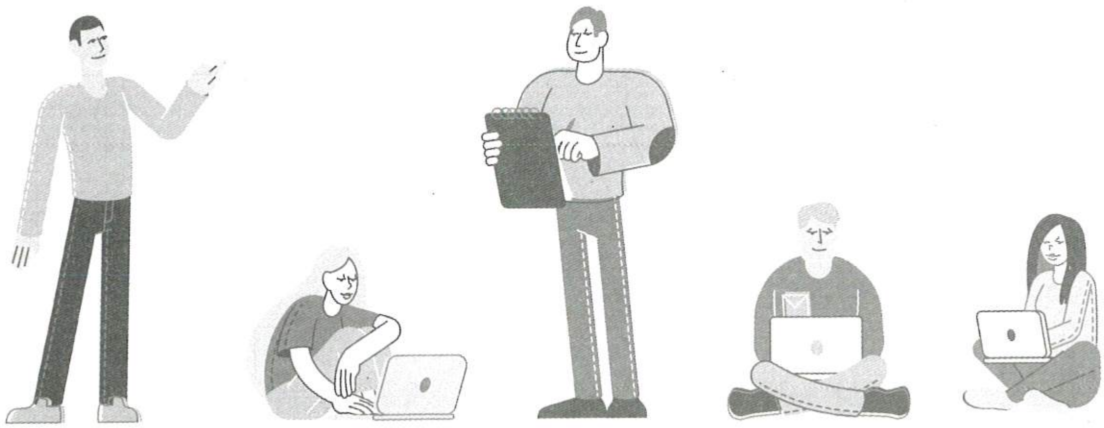
- La recta a
- La recta b

a.



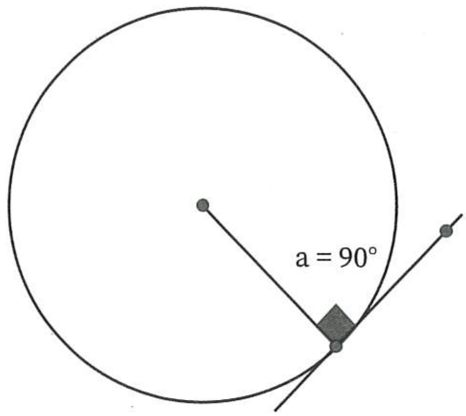
b.





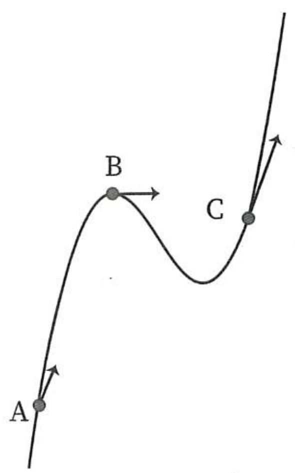
DESARROLLO

Desde la época griega, la búsqueda de la *recta tangente* a una curva en un punto ha sido uno de los asuntos que más ha interesado a los matemáticos. El problema era que el concepto de tangente se intuía, pero no se era capaz de dar una definición formal e inequívoca del mismo. Hasta que en 1823 Cauchy definió la derivada y solventó el problema, los matemáticos intentaron obtener la tangente a una curva en un punto mediante diversos e ingeniosos métodos, hoy en día totalmente olvidados. La mayoría de esos métodos son **geométricos**.



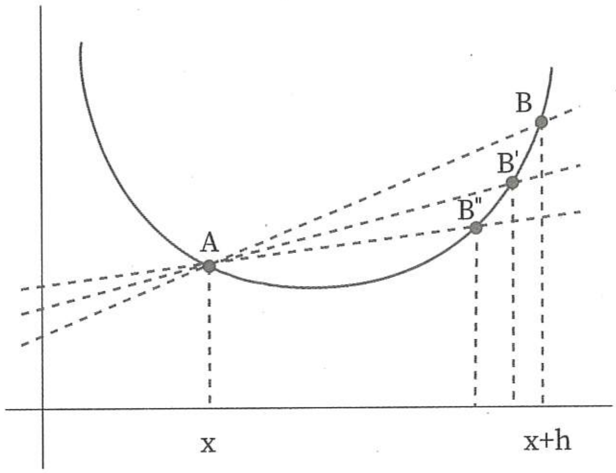
Ideas históricas de la recta tangente:

- Los griegos tenían la idea de que la tangente a una curva era una recta que "tocaba" la curva sin cortarla.
- Euclides, analizó el comportamiento de una recta trazada por una circunferencia formando un ángulo recto con su radio. Observó que la recta sólo tiene en común un punto con la circunferencia y es imposible interponer otra línea entre esa recta y la circunferencia.
- Otro matemático griego, Apolonio, desarrolló **métodos geométricos** para la construcción de rectas tangentes a parábolas, elipses e hipérbolas.



- En el siglo XVII, en la primera mitad, se desarrollaron **algoritmos** puramente **algebraicos** para encontrar tangentes. Estos algoritmos están basados en la resolución de ecuaciones y en las propiedades de las curvas. Estos algoritmos no utilizaban el concepto de límite.

- En ese mismo siglo, Newton utilizó la idea de que las curvas se describían como la trayectoria de una partícula que se mueve. Así, visualizó a la tangente como la dirección en la que la partícula se mueve en un instante concreto, asociando la tangente con el vector velocidad de la partícula.



Flash educativo

Para llegar a la definición de la tangente de una curva en un punto dado, primero se usó la tangente, después ¡fue descubierta!, después fue explorada y desarrollada y, por último, definida.

Tesoro digital

En este video se observa cómo se traza una tangente en una parábola:

- Fermat fue uno de los primeros en desarrollar la idea de que la recta tangente a una curva es la posición límite de una secante, para la cual los puntos de corte se acercan y se acercan más, hasta coincidir. Entonces la secante se convierte en una tangente.
- Cauchy, en el siglo XIX, resolvió el problema dando una precisa definición de la derivada en términos del nuevo concepto denominado límite.

"El trazo de la recta tangente debe ser perpendicular a la recta normal de una curva en el punto dado".

Vamos a revisar algunos ejemplos para tener más claridad en lo anterior.

Ejemplo 1

Determinar la recta tangente a la parábola definida por la ecuación

$y = x^2$ en el punto $P(1,1)$.

Solución

Para encontrar la ecuación de la recta tangente debemos conocer su pendiente.

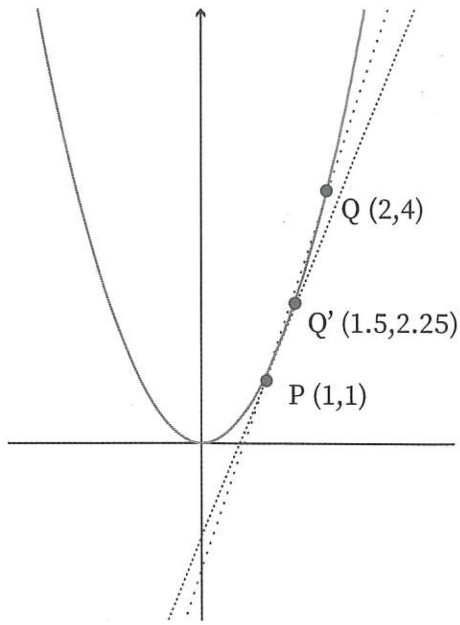
Como solo se conoce un punto de la recta tangente, es donde se nos dificulta hallar la pendiente de la tangente; sin embargo, podemos continuar adelante.

Si elegimos otro punto que pertenezca a la curva $y=x^2$ al cual llamaremos *Q(x,y) que esté por encima* del punto P, digamos $Q(2,4)$, empleando la fórmula de la pendiente obtenemos el valor de la pendiente de la recta PQ.

Para valores mayores a x=1

Elegimos de manera aleatoria varios puntos cercanos a $x=1$, obtenemos la siguiente tabla:

x	$y=x^2$	$m_{PQ}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$
2	$y=(2)^2=4$	$m_{PQ}=\dfrac{4-1}{2-1}=3$
1.5	$y=(1.5)^2=2.25$	$m_{PQ}=\dfrac{2.25-1}{1.5-1}=2.5$
1.1	$y=(1.1)^2=1.21$	$m_{PQ}=\dfrac{1.21-1}{1.1-1}=2.1$
1.01	$y=(1.01)^2=1.0201$	$m_{PQ}=\dfrac{1.0201-1}{1.01-1}=2.01$
1.001	$y=(1.001)^2=1.002001$	$m_{PQ}=\dfrac{1.002001-1}{1.001-1}=2.001$

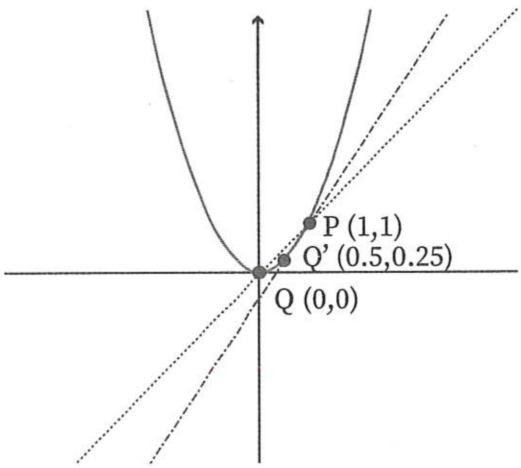


Para valores menores a $x=1$

Siguiendo el mismo procedimiento calculamos la pendiente, acercándonos con valores aleatorios menores a $x=1$, entonces tendremos la siguiente tabla:

Ahora te toca calcular los valores de y en la columna vacía. Coloca en esta tabla los resultados.

x	$y = x^2$	$m_{PQ} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
0		$m_{PQ} = \dfrac{0-1}{0-1} = 1$
0.5		$m_{PQ} = \dfrac{0.25-1}{0.5-1} = 1.5$
0.9		$m_{PQ} = \dfrac{0.81-1}{0.9-1} = 1.9$
0.99		$m_{PQ} = \dfrac{0.9801-1}{0.99-1} = 1.99$
0.999		$m_{PQ} = \dfrac{0.998001-1}{0.999-1} = 1.999$



Conclusión

Podemos decir entonces que la pendiente de la recta tangente es el límite de las pendientes de las rectas secantes, esto lo podemos representar como:

$$\lim_{Q \to P} m_{PQ} = m_{Tangente}$$

Para nuestro ejemplo:

Dado el punto P (1,1) y $Q(x,x^2)$, se plantea el cálculo del valor de la pendiente:

$$m_{PQ} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

Con este valor podemos calcular la pendiente de la recta tangente, para ello, utilizamos la forma punto – pendiente de la ecuación de la recta, que dice:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Sustituyendo, m=2 y P (1,1), calculamos la ecuación de la recta:

$$y - 1 = 2(x - 1)$$

Escribiendo la ecuación en su forma pendiente intersección, tenemos:

$$y = 2x - 1$$

CIERRE

Reto educativo

Instrucciones: en equipo determinen la ecuación de la recta tangente de las siguientes funciones en los puntos que se indican. Presenten a su grupo los resultados.

1. $y = x^2 + 1$ en el punto $P(2,5)$.
2. $y = x^3 + 1$ en el punto $P(-1,0)$.
3. $y = -x^2 + 2$ en el punto $P(-1,1)$.
4. $y = 0.5x^2 - 1$ en el punto $P(-2,1)$.
5. $y = -0.25x^3 + 1$ en el punto $P(-2,3)$.

PROGRESIÓN 3

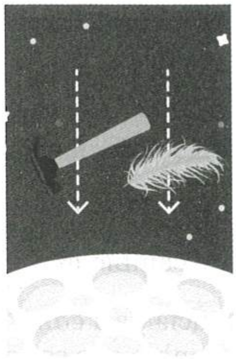
Revisa situaciones y fenómenos

HORAS: 4

... donde el cambio es parte central en su estudio, con la finalidad de modelarlos aplicando algunos conocimientos básicos de funciones reales de variable real y las operaciones básicas entre ellas.

Metas	Categorías, conceptos transversales	Subcategorías, conceptos científicos asociados
M1 Construye un modelo matemático, identificando las variables de interés, con la finalidad de explicar una situación o fenómeno y/o resolver un problema tanto teórico como de su entorno.	**C3** Solución de problemas y modelación.	**S1** Uso de modelos.

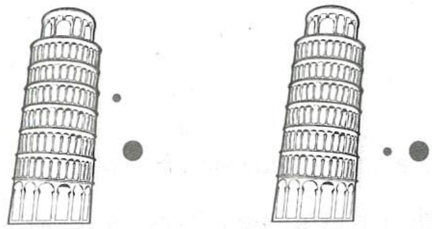
APERTURA



El 2 de agosto de 1971 David Scott, miembro de la misión del Apolo 15, fue el encargado de comprobar a través de un experimento en la superficie de la luna "**la ley de la caída de los cuerpos**", expuesta por Galileo Galilei en el siglo XVII.

Galileo Galilei estaba en lo cierto: al dejar en caída libre dos cuerpos de diferente masa, despreciando el rozamiento del aire, ambos llegaban al suelo al mismo tiempo.

En condiciones diarias donde el aire está presente, la pluma cae a un tiempo diferente que el martillo, dado el rozamiento del aire.



Aristóteles (348-322 a.C.) asumió que los objetos más pesados caían con mayor rapidez que los ligeros.

Galilei (1564-1642) demostró que pueden caer al mismo tiempo sin importar su peso dado que sea un espacio completamente libre de aire.

Reto educativo

Instrucciones: en pares respondan a las siguientes preguntas y comparen con las de sus compañeros. Comenta tus resultados en clase con tu docente.

- ¿Qué provoca el rozamiento del aire en la caída de los dos objetos?
- ¿Qué objetos se dejaron caer en la superficie de la luna?
- ¿Cuál es la propuesta de Aristóteles con respecto a la de Galileo?
- ¿Cuál fue la conclusión a la que llegaron una vez hecho el experimento en la superficie de la luna?
- ¿Cuáles son las fórmulas que modelan la caída libre de los cuerpos?

Busca en internet algunos videos sobre este experimento.

DESARROLLO

En la caída libre los cuerpos tienen una velocidad inicial y una velocidad final, con ello se puede calcular una razón de cambio con respecto al tiempo que tarda en llegar al suelo.

Al igual que cuando corremos de un punto a otro, no siempre llevamos la misma velocidad; sin embargo, podemos calcular la velocidad promedio con respecto al tiempo.

Se puede observar que estos términos son usados en la física. Una fórmula de razón de cambio es $v=\frac{d}{t}$ y para calcular la velocidad promedio se requiere la velocidad final e inicial, así como los valores del tiempo. En la física podemos encontrar varias razones de cambio que se aplican en la realidad.

A esto se le denomina Modelado de situaciones, donde las expresiones algebraicas propuestas muestran el comportamiento del evento estudiado.

Ejemplo 1

El precio de una dona es de 35 pesos, si se venden siete donas, ¿cuánto dinero se recabó?

Por supuesto que es tan solo una multiplicación y el modelado sería $f(x)=35x$, donde x representa la cantidad de donas vendidas en pesos.

Y podemos construir una tabla que lo represente.

x donas	0	1	2	3	4	5	6	7
$f(x)=35x$	0	35	70	105	130	175	210	245

Estamos observando que es una función lineal de primer grado, dado que la variación promedio es constante.

Ejemplo 2

Un auto compacto en el mercado con equipamiento inicial o básico, en el año 2024 tiene un valor de venta de 230 100 pesos. Para el año 2029 se estima que tendrá un valor de 102 096 pesos.

¿Cuál es la expresión que representa la depreciación del vehículo?

Vamos a calcular la variación media según los datos proporcionados:

$$(x,\ y)$$

$$(2024,\ 230\,100)$$

$$(2029,\ 102\,096)$$

$$m=\frac{102\,096-230100}{2029-2024}=-\frac{128\,004}{5}=-25\,600.8\,pesos$$

Entonces el valor contable por año es representado por una función lineal de primer grado, donde se considera el valor de la depreciación a lo largo del tiempo y el valor de venta del automóvil. Considera que t=0 dado que es el modelo del auto siendo éste 2024.

$$V(t)=-25\,600.8t+230100$$

Si queremos calcular el valor del vehículo dado t=3, donde t es el tiempo en años y V el valor de venta en ese momento.

$$V(3)=-25\,600.8(3)+230100=153\ \ 297.6\,pesos$$

Observa que el vehículo tuvo una depreciación y por consiguiente su valor en el mercado va en tendencia a la baja.

Función

Las funciones son modelos matemáticos que describen situaciones de economía, biología, ciencias sociales, en física, en el consumo del agua, el crecimiento de bacterias, el comportamiento de tiro parabólico de una pelota, en los costos de producción y ganancias, y todo aquello que deseamos estudiar.

Veamos algunas definiciones necesarias para comprender la diferencia entre función y relación, clasificación de funciones, tipos de funciones, entre otros.

Función y relación

Relación: la regla de correspondencia entre dos conjuntos.

Función:

Cumple con las siguientes condiciones:

- Sean **A y B dos conjuntos.**
- Responde a una **Regla de correspondencia** que asocia a los conjuntos A y B.
- A los elementos del **conjunto A** se les denomina **dominio** y a los elementos del **conjunto B** se le denomina **contradominio** o **codominio.**

Definición de función

Es el conjunto de pares ordenados (x, y) donde a cada elemento del conjunto A denominado dominio (x), le corresponde un valor del conjunto B denominado contradominio o codominio (y).

Notación:

$$f : A \to B$$

Entonces función se escribe como $y = f(x)$

x : es la variable independiente.

y : es la variable dependiente.

f : es la función, dada la regla de correspondencia.

Una técnica para verificar si una gráfica es o no función se denomina la **"regla de la recta vertical"**, que indica que: *al trazar una recta vertical, ésta corta a la curva en un solo punto*, entonces se considera función.

Dominio, contradominio y rango

Entonces decimos que:

- **Dominio**: son todos los valores de x que pertenecen al conjunto de los números reales $\{x \in \mathbb{R}\}$.
- **Contradominio**: son todos los valores posibles para el conjunto *y*.
- **Rango:** son aquellos elementos del conjunto B que se asocian con elementos del conjunto A y que cumplen la regla de correspondencia. Pudiéramos entender el rango como los resultados de haber calculado *x*.

Tesoro digital

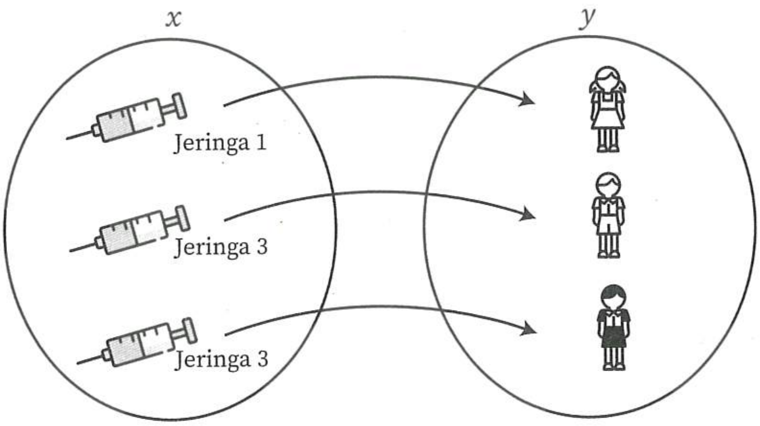
Revisa el siguiente enlace, que es un repositorio de la UNAM, te ayudará a comprender mejor el tema.

Tipos de función: inyectiva, suprayectiva y biyectiva

- **Inyectiva**: a cada elemento de x dominio, le corresponde uno y solo un elemento de y rango. Si trazas una recta paralela al eje x, solo toca a un punto de la curva.

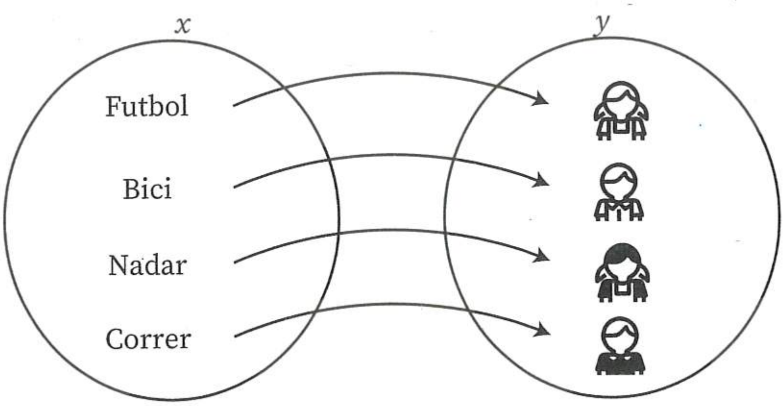
Ejemplo 3

El conjunto de las jeringas(x) para vacunar a los niños (y), por cada niño una jeringa nueva.



- **Suprayectiva o sobreyectiva**: para todo elemento del conjunto B, siempre hay algún elemento del conjunto A que le fue asignado.

Ejemplo 4



- **Biyectiva:** siempre y cuando sea inyectiva y suprayectiva.

Tesoro digital

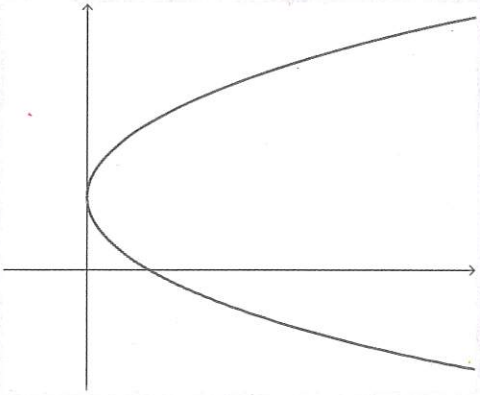
Revisa el QR para complementar con un video la explicación sobre las funciones inyectivas, suprayectivas y biyectivas.

Reto educativo 1

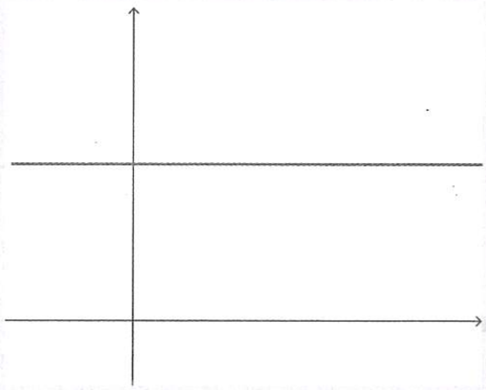
Instrucciones: utilizando la **regla de la recta vertical** identifica las gráficas que representan una función.

Compara con tus compañeros tus conclusiones, te adelantamos que hay algunas gráficas que no son funciones y quedan en nivel de relación, identifica cuáles son:

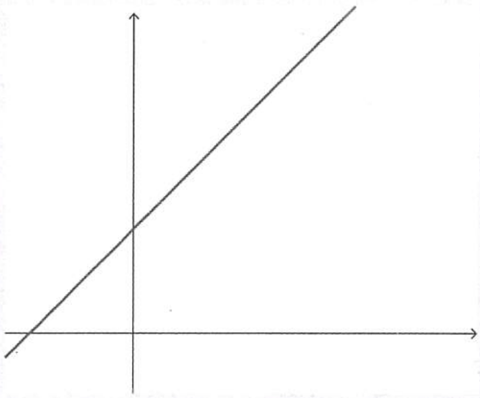
a.



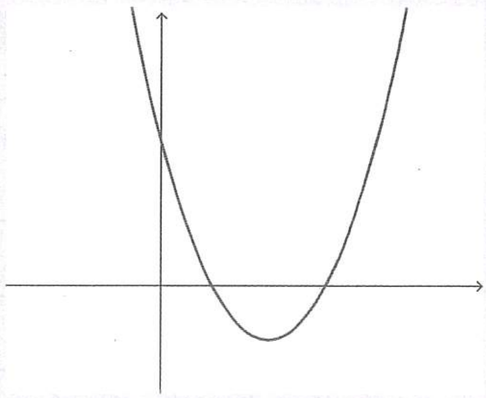
b.



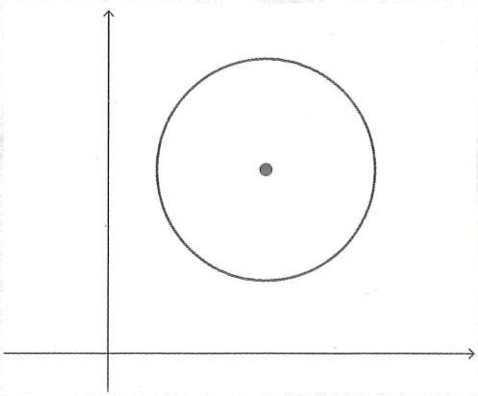
c.



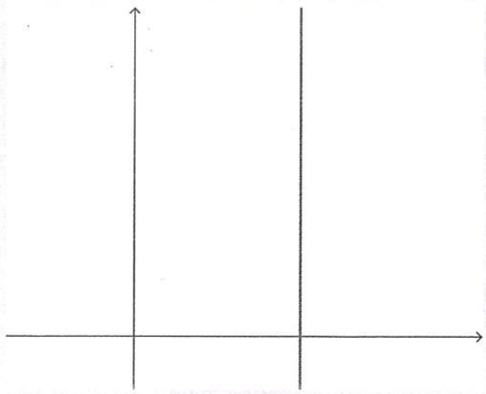
d.



e.



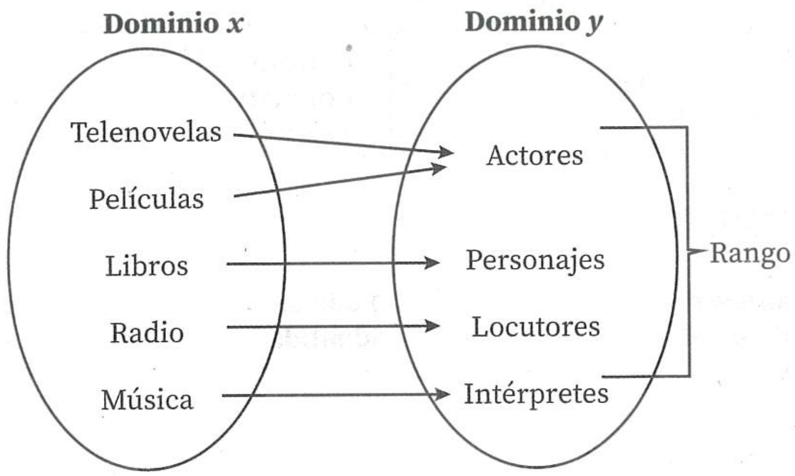
f.



Representación sagital

Otra manera de describir una función es con un diagrama sagital, usando óvalos y una flecha que indica la ***correspondencia*** que conecta a los elementos de **x** del conjunto A con los elementos que le corresponden a **y** del conjunto B.

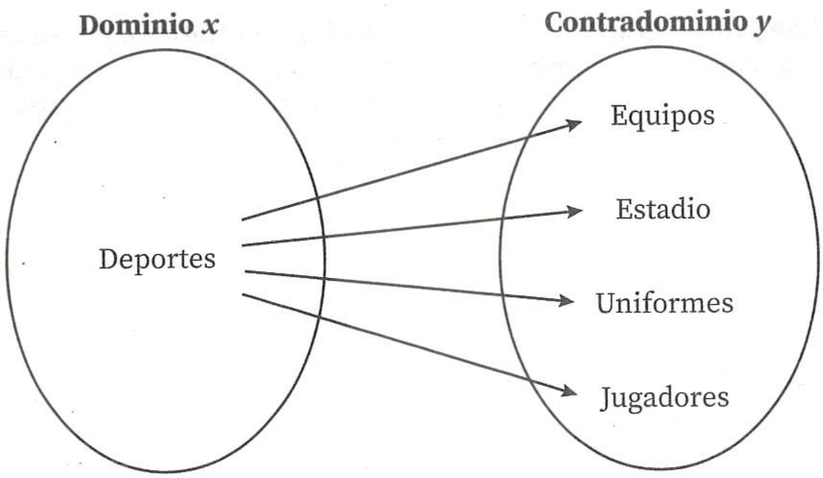
Ejemplo 1: función



Ejemplo 2

Relación: es un conjunto de pares ordenados (x, y).

Observa que en el ejemplo planteado se repiten los valores del dominio y con ello se deduce que la representación solo llega a nivel de relación.



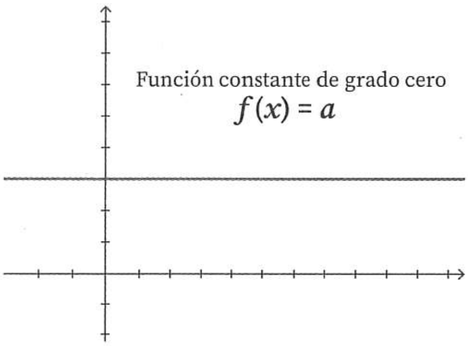
Tipos de funciones: se clasifican en funciones algebraicas y trascendentes.

Tipos de funciones

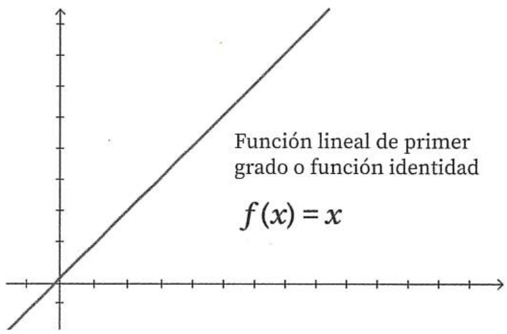
- Funciones
  - Algebraicas
    - Polinómicas
      - Constantes
      - De 1er grado
      - Cuadráticas
    - Racionales
    - Radicales
    - A trozos
  - Trascendentes
    - Exponenciales
    - Logarítmicas
    - Trigonométricas

TIPOS DE FUNCIONES

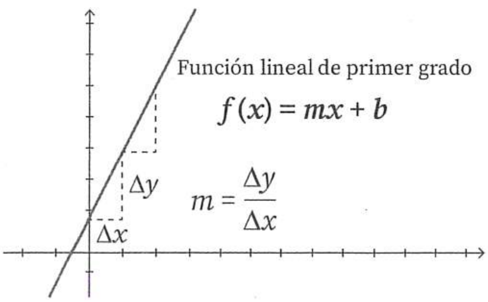
Función constante o de grado cero: $f(x)=a$, donde $a \in \mathbb{R}$, la recta es paralela al eje **x**.



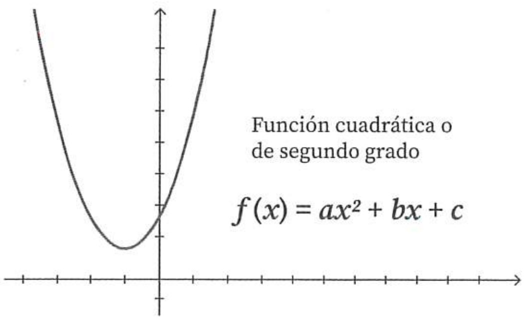
Función lineal de primer grado o función identidad: $f(x)=x$



Función lineal de primer grado: $f(x)=mx+b$, donde m se denomina pendiente de la recta y b es la ordenada al origen.

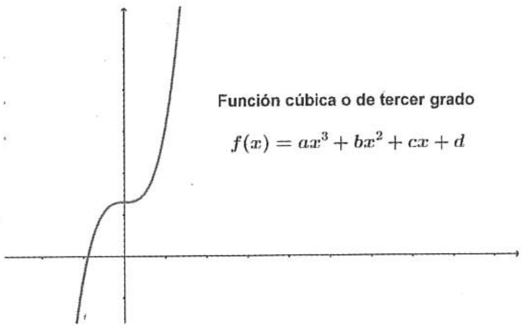


Función cuadrática o de segundo grado: $f(x)=ax^2+bx+c$ es una parábola que abre hacia arriba o hacia abajo.



Función cúbica o de tercer grado:

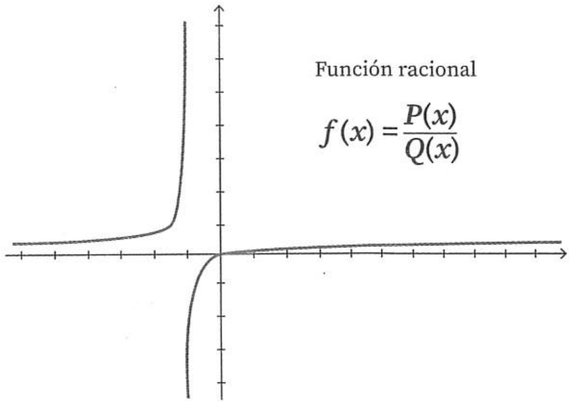
$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$



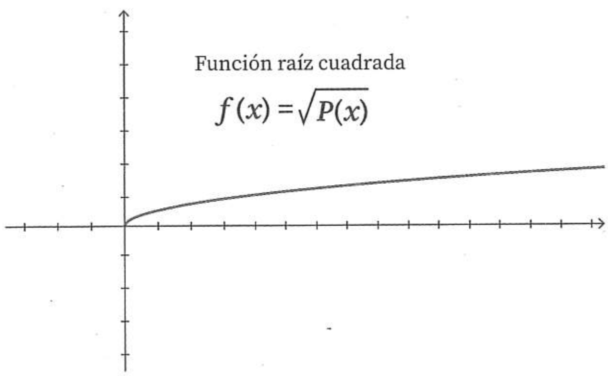
Función racional: se reconoce como el cociente de dos funciones.

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Dado que $Q(x) \neq 0$



Función raíz cuadrada: está dada por la forma $f(x) = \sqrt{P(x)}$, dado que $P(x) \geq 0$



Reto educativo 2

Instrucciones: esta actividad la puedes trabajar en clase o en casa.

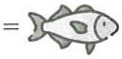
Es momento de explorar un poco con GeoGebra el resto de las funciones.

Puedes buscar algunos tutoriales sobre como trazar la función:

a. Valor absoluto
b. Función mayor entero
c. ¿Cuáles son las funciones trascendentes?

Operaciones con funciones

Sean dos funciones f y g, con las cuales ejecutaremos las operaciones de meme $f(g(x))$:

a. Suma $f(x)+g(x)=(f+g)(x)$	f (x) =  g (x) = 
b. Resta $f(x)-g(x)=(f-g)(x)$	
c. Multiplicación $f(x).g(x)=(f.g)(x)$	f (g(x)) = 
d. División $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$	
e. Composición $(f\circ g)=f\left[\,g(x)\right]$	g (f(x)) = 

Ejemplo 3

Para las siguientes funciones calcula las operaciones hasta obtener una nueva expresión:

$$f(x)=x+2,\ g(x)=-3$$

a. $f(x)+g(x)=(x+2)+(-3)=x+2-3=x-1$

b. $f(x)-g(x)=(x+2)\text{—}=x+2+3=x+5$

c. $f(x).g(x)=(x+2)(-3)=-3x-6$

d. $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{(x+2)}{-3}=-\dfrac{(x+2)}{3}$

e. Composición $(f\circ g)=f(-3)=-3+2=-1$

Ejemplo 4

Para las siguientes funciones calcula las operaciones hasta obtener una nueva expresión:

$$f(x)=x^2+5x+6,\ g(x)=x+1$$

a. $f(x)+g(x)=(x^2+5x+6)+(x+1)=x^2+5x+6+x+1=x^2+6x+7$

b. $f(x)-g(x)=(x^2+5x+6)-(x+1)=x^2+5x+6-x-1=x^2+4x+5$

c. $f(x).g(x)=(x^2+5x+6)(x+1)=x^3+x^2+11x+6$

d. $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{(x^2+5x+6)}{x+1}$

e. Composición $(f \circ g)(x) = f(x+1) = (x+1)^2 + 5(x+1) + 6$

$$= x^2 + 2x + 1 + 5x + 5 + 6$$

$$= x^2 + 7x + 12$$

Ejemplo 5

Para las siguientes funciones calcula las operaciones hasta obtener una nueva expresión:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1}, \; g(x) = x$$

a. $f(x) + g(x) = \sqrt{x^2 - 1} + x$

b. $f(x) - g(x) = \sqrt{x^2 - 1} - x$

c. $f(x).g(x) = \left(\sqrt{x^2 - 1}\right)x = x\sqrt{x^2 - 1}$

d. $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}$

e. Composición

$(f \circ g) = f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

Tesoro digital

Revisa el QR o el link propuesto sobre algunas recomendaciones y ejemplos adicionales sobre el contenido de operaciones con funciones:

Ejemplo 6

En una agencia de autos compactos se pide realizar el modelado que exprese el descuento de $10,000.00 del precio regular de un auto que se ofertará en promoción. Se desea cobrar el 95% del precio regular. Esta situación se da cuando los autos no tuvieron la demanda pronosticada o llegarán nuevos modelos.

Veamos cómo podremos resolver la situación.

Planteamiento

Precio del auto: x

Precio del auto con descuento: $f(x) = x - 10000$

El 95% del precio del auto: $g(x) = 0.95x$

Entonces podemos decir que la expresión composición es que incluya tanto el precio del auto con descuento y el 95% a cobrar es:

$$(f \circ g) = f(g(x)) = f(.95x) = 0.95x - 10000$$

El precio del auto compacto más económico para 2024 está en razón de 230 000, considerando la versión inicial o también llamada austera.

Entonces el cálculo queda de la siguiente manera:

$$(f \circ g) = 0.95(230000) - 10000 = \$208500.00$$

El precio final del auto a cobrar es de $208 500.00

Reto educativo 3

Instrucciones: puedes trabajar en equipos de cuatro o cinco personas para resolver cada ejercicio. Al finalizar comparte los resultados, de esta manera se ejerce la coevaluación entre compañeros de equipo. Trabaja en tu libreta.

1. Para las siguientes funciones calcula las operaciones hasta obtener una nueva expresión.

   a. $f(x)+g(x)$

   b. $f(x)-g(x)$

   c. $f(x).g(x)$

   d. $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

   e. $(f \circ g)(x)$

   - $f(x)=x+2$, $g(x)=x-4$
   - $f(x)=x^2-3$, $g(x)=\sqrt{x}$
   - $f(x)=\sqrt{x^2-3}$, $g(x)=4$
   - $f(x)=x^2-4x+2$, $g(x)=x+1$

2. Decidiste sembrar manzanilla y yerba buena en tu casa. Para ello requieres cercar una porción de tu jardín y cuentas con una pared, para cercar dispones de 800 metros de malla y solo vas a cercar tres lados del rectángulo.

   Expresa el área del jardín en términos de su ancho.

   Denominemos a $\boldsymbol{x}$ como el ancho y a $\boldsymbol{y}$ como el largo del rectángulo a cercar.

3. Vamos a analizar la siguiente situación: el costo de producir playeras deportivas está dado por $C(x)=30x+1500$ y el ingreso por cada playera es de $180.00. ¿Cuál es la utilidad, considerando las expresiones anteriores?

   Comparte el planteamiento con tus compañeros y docente, para reconocer la operación con funciones que fue necesaria realizar para encontrar la utilidad.

   Plantea el procedimiento y comenta con tus compañeros la solución a la situación.

   Es importante que reconozcas que los costos están compuestos por costo fijo y costo variable de producir una pieza, así como que el ingreso es el precio de venta por producto.

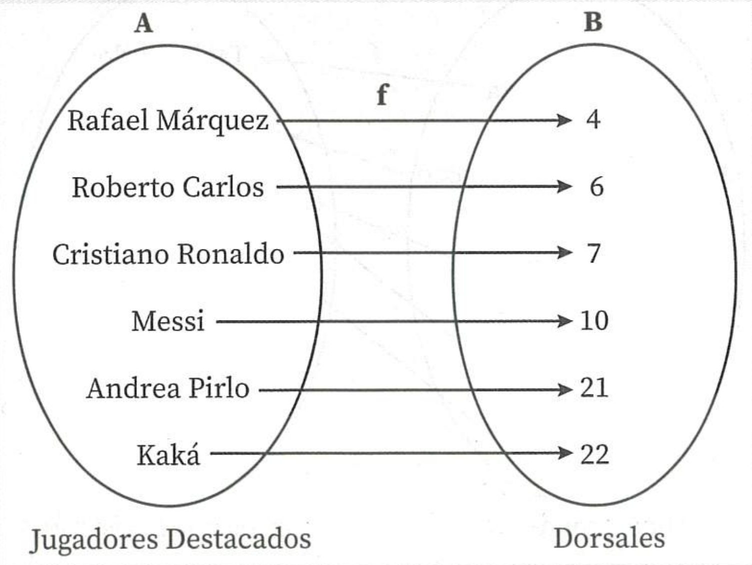
CIERRE

Reto educativo

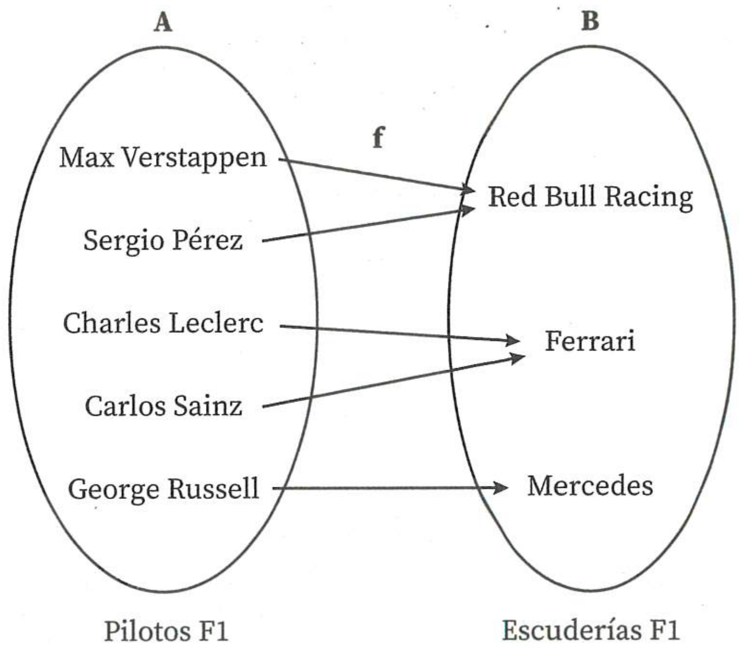
Instrucciones: trabaja en equipos o pares para identificar de los ejemplos en sagital la función inyectiva, la función suprayectiva, la función biyectiva y la relación.

Para cerrar esta progresión será necesario que compares tus resultados con tus compañeros y el grupo pueda validar las respuestas para que todos tengan la misma información.

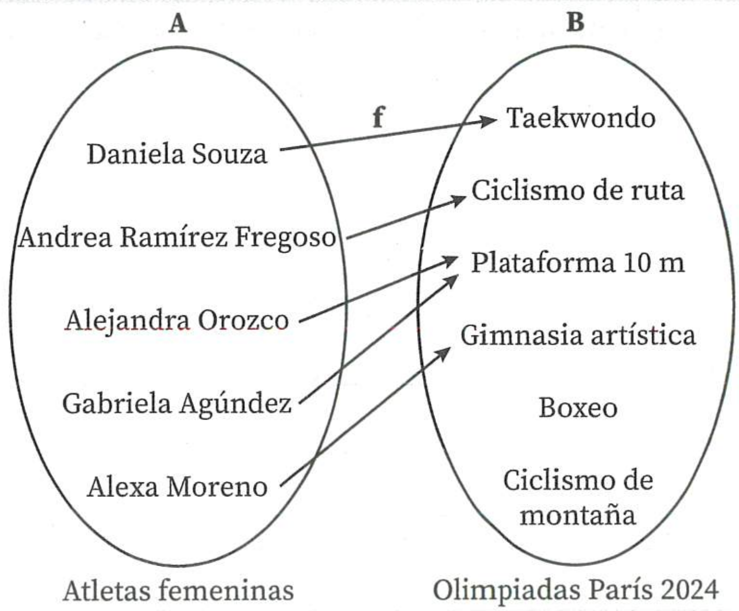
1. La representación sagital de los jugadores destacados y los dorsales que los identifica en sus diversos equipos por ser personajes emblemáticos para el equipo.



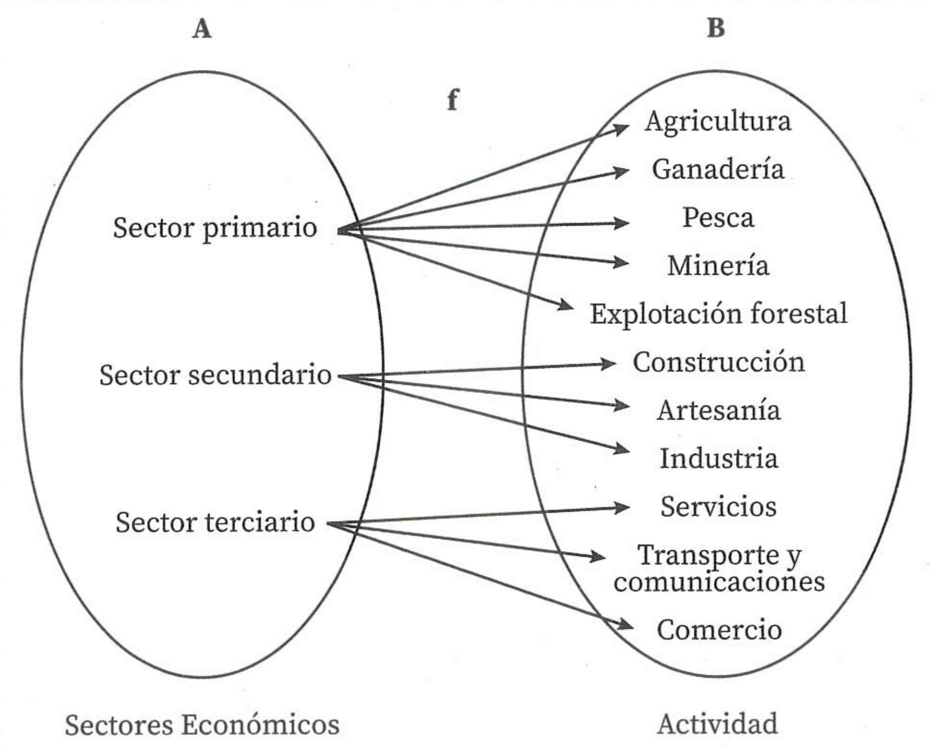
2. La representación sagital de los pilotos de la F1 y sus escuderías en la temporada 2024.

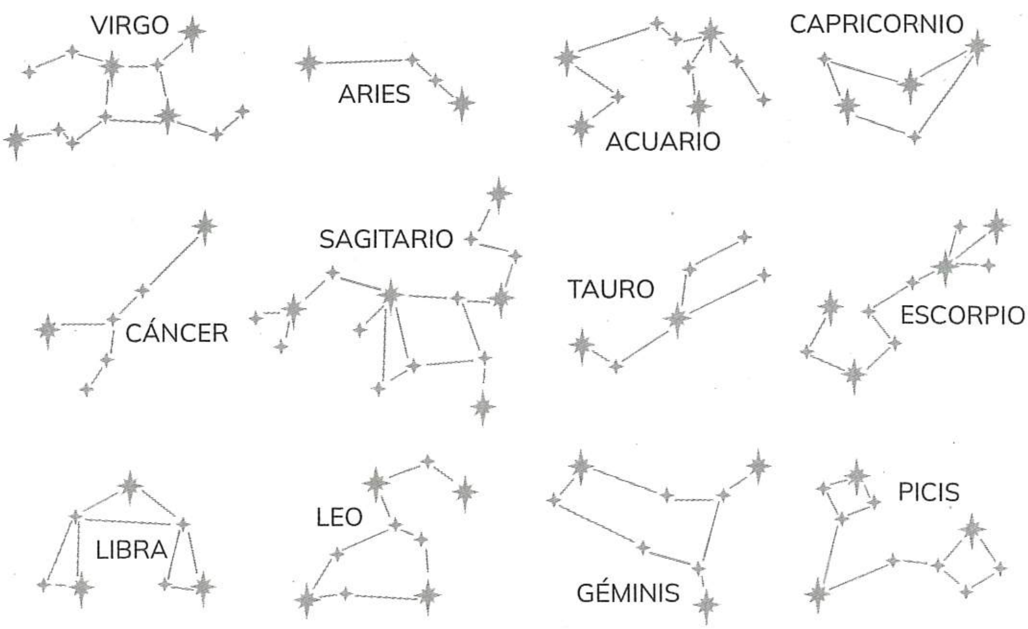


3. La representación sagital de las atletas calificadas a las olimpiadas de París 2024 en algunas disciplinas.



4. La representación sagital de los sectores productivos y sus actividades.





PROGRESIÓN 4

Analiza la gráfica

HORAS: 5

... de funciones de variable real buscando simetrías y revisa conceptos como continuidad, crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos relativos, concavidades, entre otros, resaltando la importancia de estos en la modelación y el estudio matemático.

Metas

M1 Observa y obtiene información de una situación o fenómeno para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a entenderlo.

Categorías, conceptos transversales

C3 Procesos de intuición y razonamiento.

Subcategorías, conceptos científicos asociados

S1 Capacidad para observar y conjeturar.
S2 Pensamiento intuitivo.

APERTURA

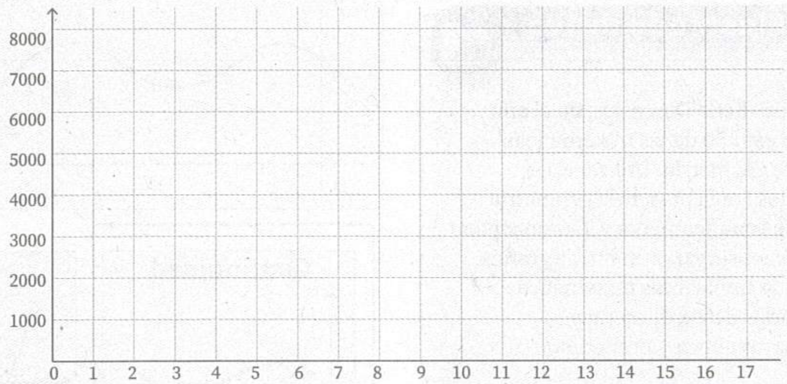
Reto educativo

En la tabla se muestra la cantidad de nacimientos registrados en el municipio de Oaxaca de Juárez en el periodo 2000 – 2008 (Fuente: INEGI)

Año	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
Cantidad	6320	6357	6478	6436	6530	6442	5768	6847	6715

Utilizando el siguiente plano cartesiano sitúa los datos a mano y une los puntos adyacentes por medio de segmentos rectilíneos.

En el **eje x** indica los años (2000=1) y en **el eje y** la cantidad.



Reflexiona y contesta:

- ¿En qué años hubo un descenso en los nacimientos registrados?
- ¿En qué años hubo un ascenso en los nacimientos registrados?
- ¿Entre qué años la diferencia fue la menor?
- ¿Entre qué años la diferencia fue la mayor?
- ¿En qué año fue el mayor registro?
- ¿En qué año fue el menor?

Como habrás notado, al estudiar un fenómeno social, como es este caso, se pueden recolectar los datos de manera fácil a través de una tabla, pero es difícil observar ciertas situaciones si no se representan esos mismos datos en forma de una gráfica. Se vuelven más evidentes los segmentos en donde hay un descenso o un ascenso, así como el punto más bajo y el más alto. Además, nos ayuda a intuir si el registro de nacimientos en los próximos años es ascendente o descendente.

En eso radica la importancia de la gráfica de las funciones.

DESARROLLO

Las gráficas de las funciones resultan de gran utilidad, ya que nos permiten observar el comportamiento de los datos, podemos ver si existe una tendencia ascendente o descendente de los datos, en qué intervalos crecen o decrecen, si la función tiene un punto máximo, un mínimo y ciertos puntos en donde hay picos o existen valles (hundimientos) en la gráfica, también si la gráfica corta o intersecta a los ejes.

Por eso es importante conocer como determinar esos aspectos o características que tienen las gráficas de las funciones.

La gráfica de una ecuación

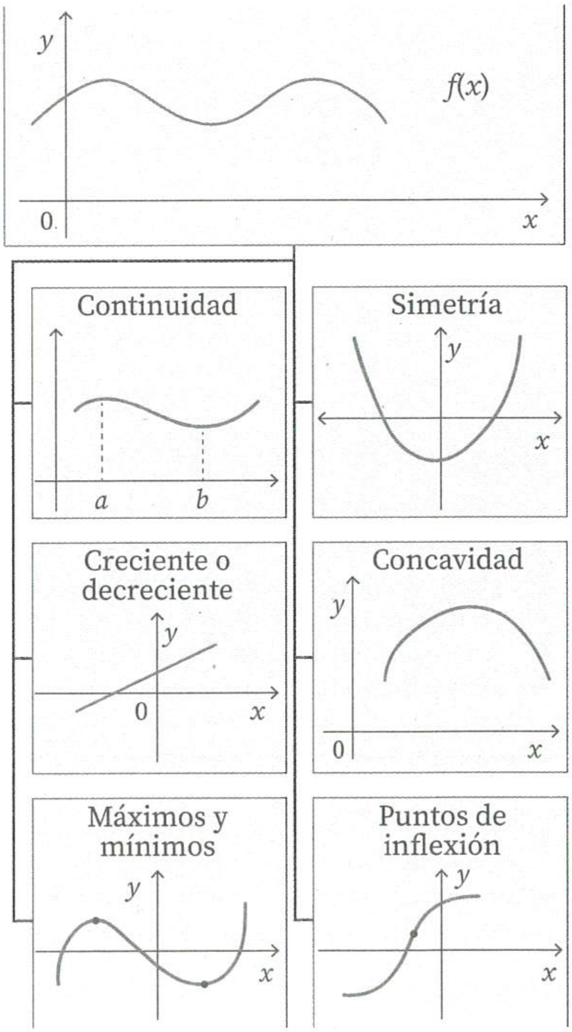
Características de la gráfica de una ecuación

Flash educativo

El matemático francés Rene Descartes, en el año 1637, revolucionó el estudio de las matemáticas al unir el álgebra y la geometría. Utilizando el plano coordenado, los conceptos de la geometría pudieron expresarse analíticamente y los conceptos algebraicos pudieron observarse en forma gráfica. Esta nueva manera de trabajar las matemáticas permitió contemplarlas desde diferentes perspectivas (gráfica, analítica y numérica).

Flash educativo

Gottfried Wilhelm Leibniz usó por primera vez, en 1694, la palabra función como un término para indicar cualquier cantidad unida a una curva, como las coordenadas de un punto, de una curva o la pendiente de ésta. Cuarenta años más tarde, Leonhard Euler usó la palabra función para describir cualquier expresión constituida por una variable y algunas constantes. Él introdujo la notación $y=f(x)$.



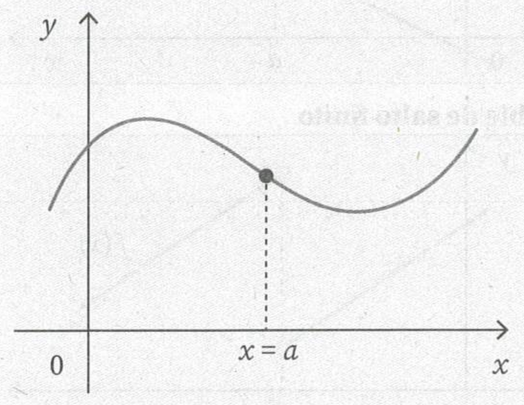
Continuidad

La continuidad de la gráfica de una ecuación, se dice intuitivamente, se logra cuando podemos dibujar la gráfica con un solo trazo del lápiz sin levantar del papel.

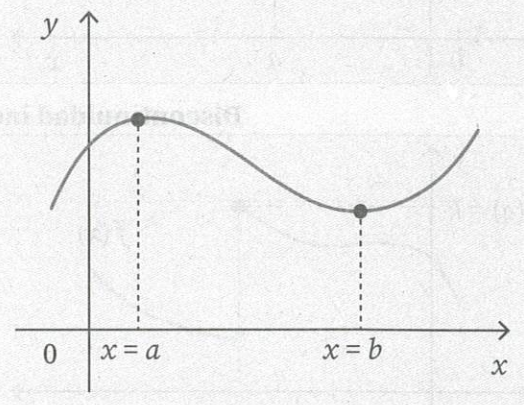
Aunque esta idea es simple, cuando se trata de profundizar en el estudio de funciones, no es precisa.

En las funciones se observan tres tipos de continuidad: en un punto, en un intervalo abierto y en un intervalo cerrado.

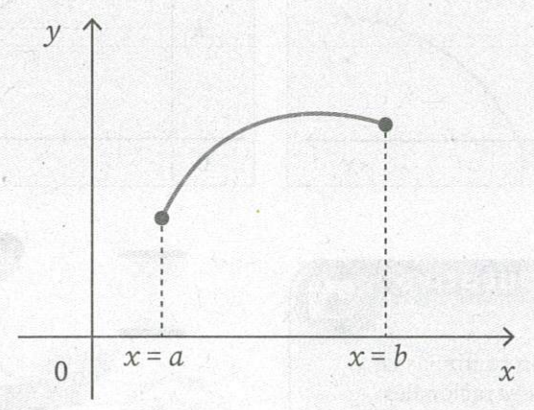
Continuidad



Continuidad en un punto



Continuidad en un intervalo abierto (a, b)

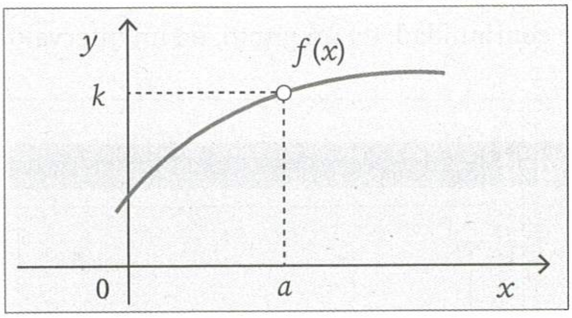


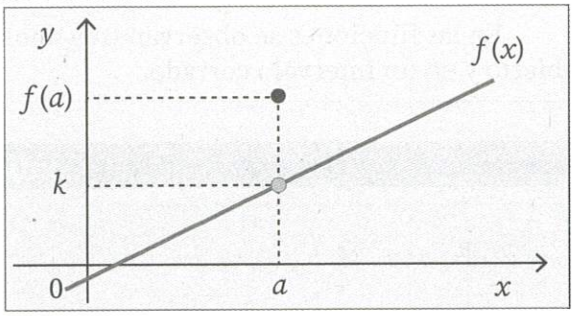
Continuidad en un intervalo cerrado [a, b]

Discontinuidad

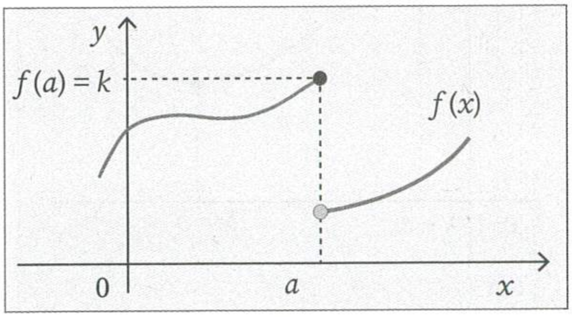
Se dice que la gráfica de una ecuación es discontinua si presenta un hueco, un corte o un salto. Existen dos tipos de discontinuidad: evitable e inevitable. Dentro de las discontinuidades inevitables se encuentran las de salto finito y de salto infinito.

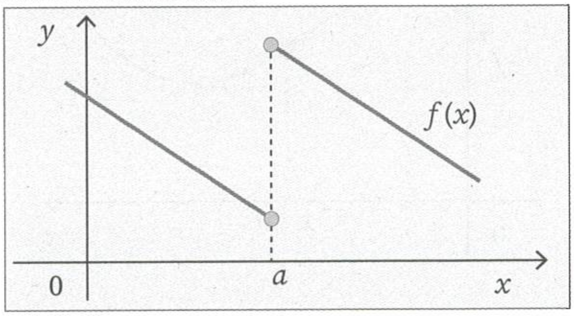
Discontinuidades evitables



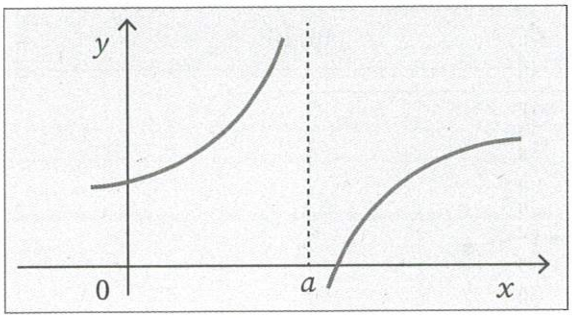


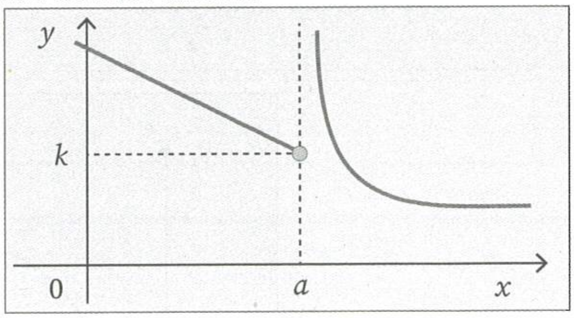
Discontinuidad inevitable de salto finito





Discontinuidad inevitable de salto infinito



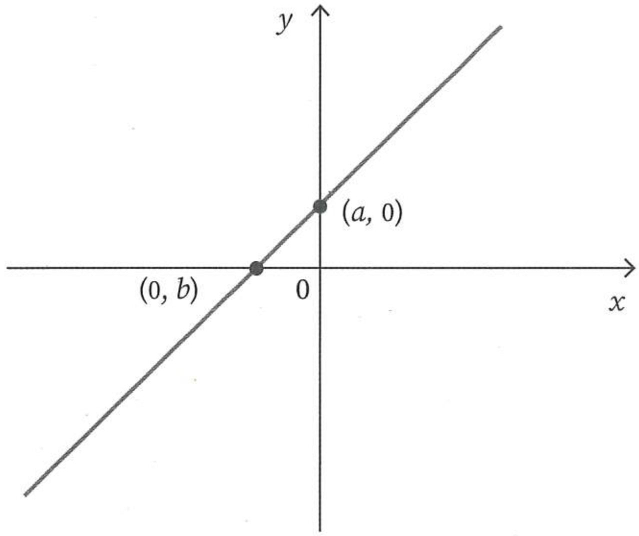


Flash educativo

Las funciones polinomiales son continuas en los números reales, las funciones racionales son continuas en su dominio y las funciones compuestas son continuas en su dominio.

Intersecciones de una gráfica con los ejes

Dentro de los puntos solución que dan origen a la gráfica de una función existe dos que son importantes: los que tienen cero en la coordenada en x y el que tiene cero en la coordenada en y. Estos puntos son conocidos como *intersecciones con los ejes*. La intersección con el eje x es representado con el punto *(a, 0)* y la intersección con el eje y con el punto *(0, b)*.



Es posible que una gráfica no tenga intersecciones con los ejes, o bien, podría tener varias.

Ejemplo 1

Encuentra las intersecciones con los ejes x y y de la gráfica

$$y = x^2 - 4x + 3$$

Solución

Para encontrar las intersecciones con el eje x, igualamos a cero el valor de y. Resolvemos la ecuación para x:

$x^2 - 4x + 3 = 0$	Sustituimos $y = 0$
$(x-3)(x-1) = 0$	Factorizamos
$x = 3 \;\; x = 1$	despejamos x para resolver.

Como esta ecuación tiene dos soluciones, se puede concluir que la gráfica tiene dos intersecciones con el eje x: *(1, 0)* y *(3, 0)*.

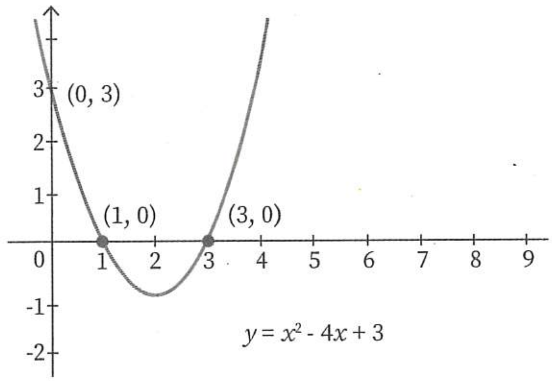
Para encontrar las intersecciones con el eje y, hacemos x=0 y sustituimos en la ecuación:

$$y = x^2 - 4x + 3$$

$(0)^2 - 4(0) + 3 = y$	Sustituimos $x = 0$
$0 - 0 + 3 = y$	Realizamos las operaciones
$y = 3$	Resolviendo

La solución indica que la gráfica tiene como intersección con el eje *y*: *(0, 3)*.

Ahora ubicamos todos los puntos en el plano cartesiano, observa las intersecciones con los ejes.



Reto educativo 1

Trabaja en tu libreta, puedes apoyarte en GeoGebra para verificar tus resultados; sin embargo, pide a tu docente que te ayude a revisar tus procedimientos.

Determina las intersecciones con los ejes de la gráfica de los siguientes incisos:

a. $y = 4 - x^2$

b. $y = x^3 - x$

c. $y = -2x + 2$

d. $y = x^3 - 2x^2 - x + 2$

e. $y = -x^2 + 2x + 3$

Simetría de una gráfica

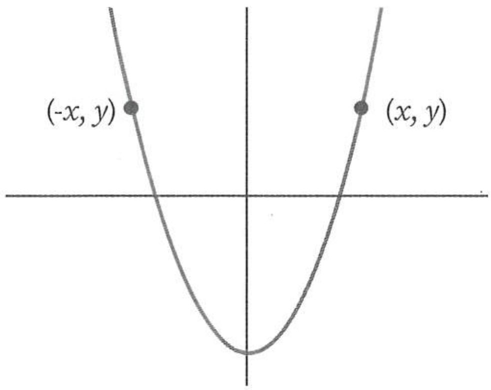
Es de gran utilidad saber que una gráfica tiene simetría antes de trazarla, ya que ayuda a determinar una apropiada visión de ella.

Vamos a pensar que como en una pantalla de computadora o de celular, la gráfica se verá en un rectángulo, el cual llamaremos rectángulo de visión, entonces, si conocemos que la gráfica es simétrica podemos determinar cuál es el rectángulo de visión apropiado.

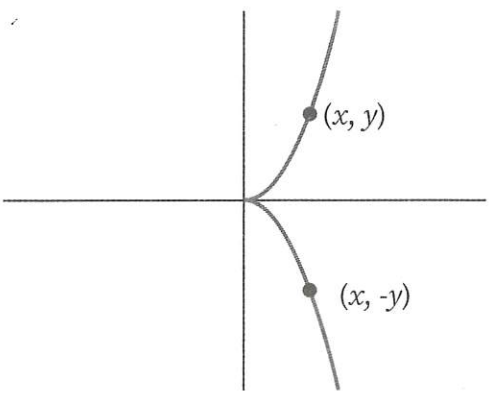
Existen tres tipos de simetría:

1. Una gráfica es **simétrica respecto al eje *y***, esto siempre que (x, y) sea un punto de la gráfica, y $(-x, y)$ también lo sea.
2. Una gráfica es **simétrica respecto al eje *x***, esto siempre que (x, y) sea un punto de la gráfica, y $(x, -y)$ también lo sea.
3. Una gráfica es **simétrica respecto al origen**, esto siempre que (x, y) sea un punto de la gráfica, y $(-x, -y)$ también lo sea.

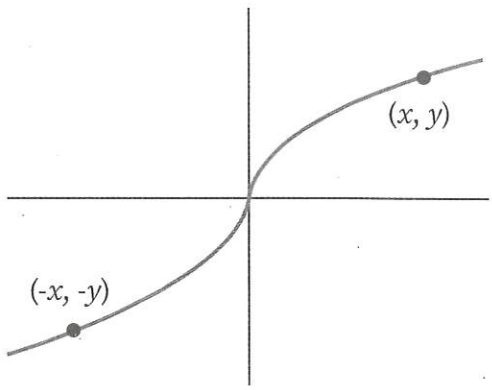
Simetría respecto al eje y:



Simetría respecto al eje x



Simetría respecto al origen



Pruebas para determinar la simetría:

1. La gráfica de una ecuación en x y y es **simétrica respecto al eje *y*** si al sustituir x por $-x$ se obtiene una ecuación equivalente.
2. La gráfica de una ecuación en x y y es **simétrica respecto al eje *x*** si al sustituir y por $-y$ se obtiene una ecuación equivalente.
3. La gráfica de una ecuación en x y y es **simétrica respecto al origen** si al sustituir x por $-x$ y y por $-y$ se obtiene una ecuación equivalente.

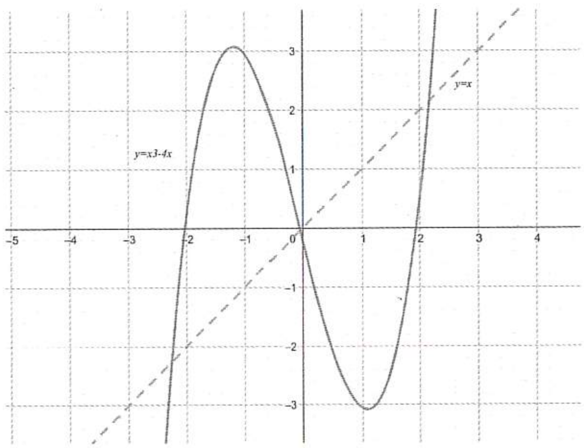
Ejemplo 2

Demuestra que la gráfica de $y = x^3 - 4x$ es simétrica respecto al origen.

Solución

$y = x^3 - 4x$	Ecuación
$-y = (-x)^3 - 4(-x)$	Sustituyendo x por $-x$ y y por $-y$
$-y = -x^3 + 4x$	Simplificando
$y = x^3 - 4x$	Multiplicando por *-1*

Como se observa, al realizar la sustitución de las variables, se obtiene una ecuación equivalente. Podemos concluir que la gráfica de $y = x^3 - 4x$ es **simétrica respecto al origen**.



Ejercicios:

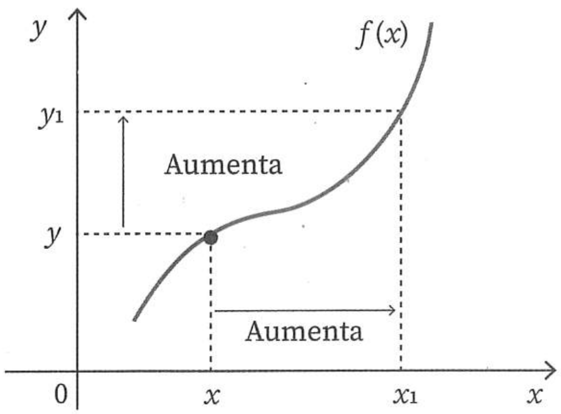
1. Demuestra que la gráfica de $y = x^2 - 2$ es simétrica respecto al eje y.
2. Demuestra que la gráfica de $y^2 = x^3 - 1$ es simétrica respecto al eje x.
3. Demuestra que la gráfica de $y = \frac{4}{x}$ es simétrica respecto al origen.
4. Demuestra que la gráfica de $y = \frac{x}{x^2 + 1}$ es simétrica respecto al origen.
5. Demuestra que la gráfica de $y = |x^3 + x|$ es simétrica respecto al eje y.

En funciones, una función es par si su gráfica es simétrica respecto al eje y, e impar si su gráfica es simétrica con respecto al origen. La simetría en el eje x no existe en las funciones.

Gráfica creciente o decreciente

La gráfica de una ecuación es creciente en un intervalo si al aumentar el valor de x aumenta el valor de y. Y es decreciente si al aumentar x, disminuye el valor de y.

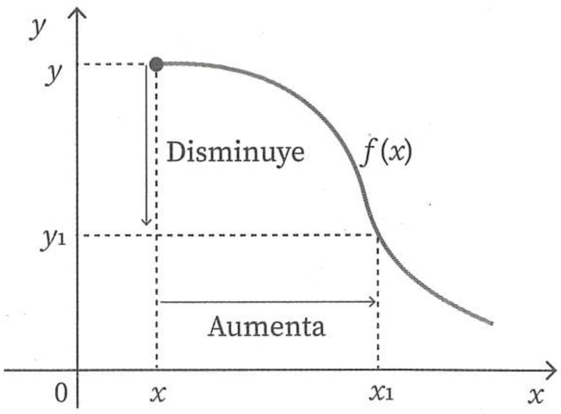
Gráfica creciente



Donde:

$x_1 > x$
$y_1 > y$

Gráfica decreciente



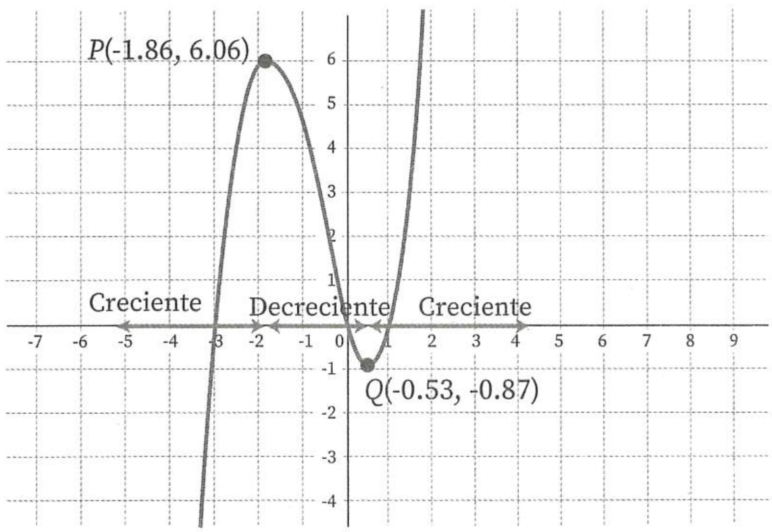
Donde:

$x_1 > x$
$y_1 < y$

Ejemplo 3

En la siguiente gráfica determina en qué intervalos la función es creciente o decreciente.

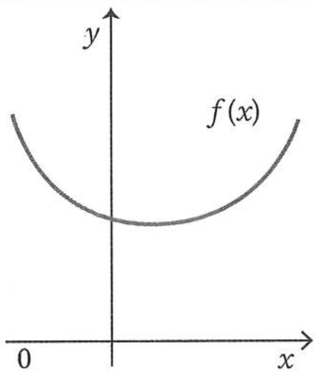
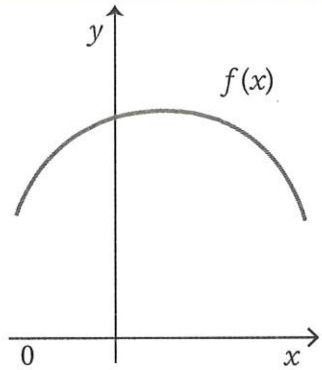
Solución



La función es creciente entre $-\infty$ y -1.86, además del intervalo entre -0.53 y $+\infty$.

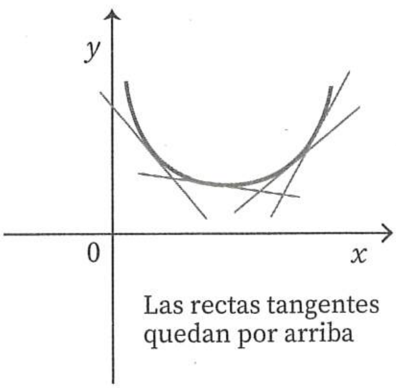
La función es decreciente entre -1.86 y -0.53.

CONCAVIDAD

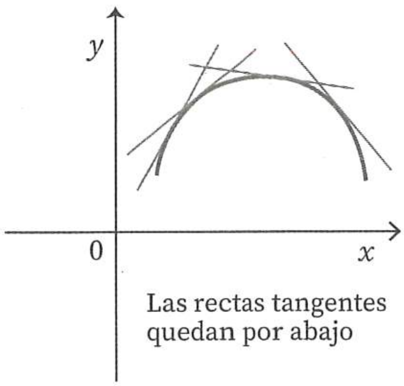
La idea de concavidad hacia arriba es un plato con pozole.	La idea de concavidad hacia abajo es un plato sin pozole.
 **Plato con pozole**	 **Plato lavado y secándose**
 Cóncava hacia arriba	 Cóncava hacia abajo

Si trazamos rectas tangentes a estas curvas, se observa lo siguiente:

En el primer caso la gráfica queda por arriba de las rectas tangentes y en el segundo caso, la gráfica queda por debajo de las rectas tangentes:



Las rectas tangentes quedan por arriba



Las rectas tangentes quedan por abajo

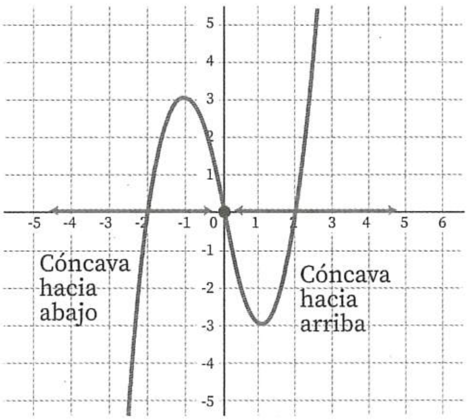
Entonces, podemos decir que:

La gráfica de una función es cóncava hacia arriba alrededor de un punto si la gráfica queda por debajo de las rectas tangentes en ese punto. Por otro lado, la gráfica será cóncava hacia abajo alrededor de un punto si la gráfica queda por debajo de las rectas tangentes, alrededor de dicho punto.

Ejemplo 4

En la siguiente gráfica determina el intervalo en que es cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo.

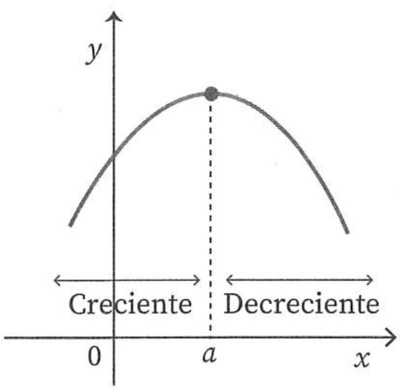
Solución



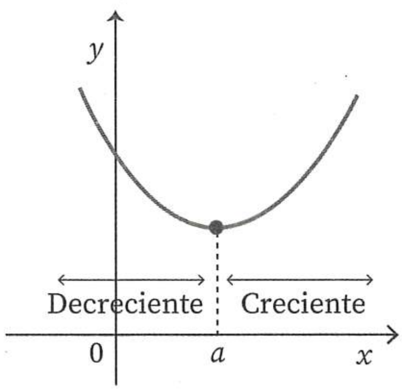
La función es cóncava hacia abajo, entre $-\infty$ y 0, y es cóncava hacia arriba, entre 0 y ∞.

Máximos y mínimos

Un máximo relativo de una función es un punto de la gráfica donde la función cambia de ser creciente a ser decreciente. Por su parte, el mínimo relativo de una función es un punto de la gráfica donde la función cambia de ser decreciente a ser creciente (Leithold, 1988).



Máximo relativo

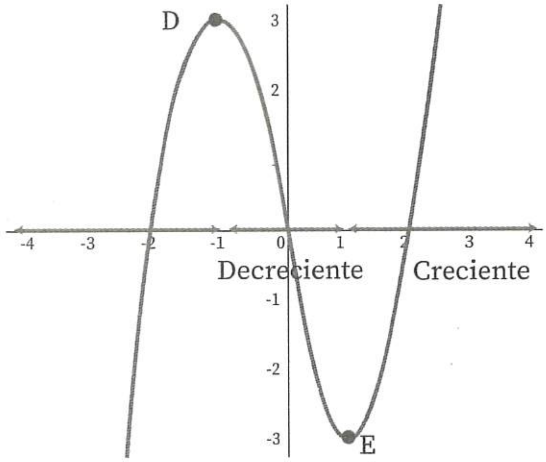


Mínimo relativo

Ejemplo 5

Indica que punto es máximo y mínimo de la siguiente gráfica.

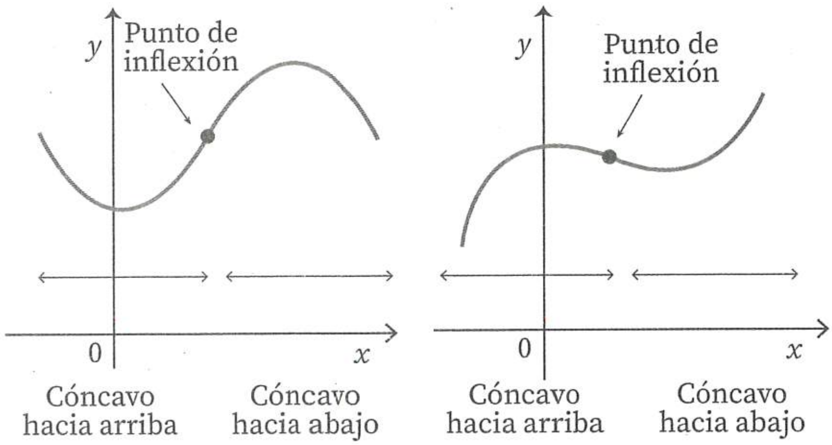
Solución



Observando la gráfica, el punto D es un máximo debido a que la gráfica crece y pasando el punto decrece y el punto E es un mínimo, la gráfica decrece y pasando el punto crece.

Puntos de inflexión

Un punto de inflexión de una gráfica es aquel donde hay un cambio de concavidad. Es la transición donde pasa de ser cóncava hacia arriba a ser cóncava hacia abajo y viceversa.



Ahora que ya conocemos las principales características que puede tener una gráfica, podemos analizar su comportamiento de forma más detalla. De tal manera que la interpretación de la gráfica nos permita resolver problemáticas que se pueden representar visualmente.

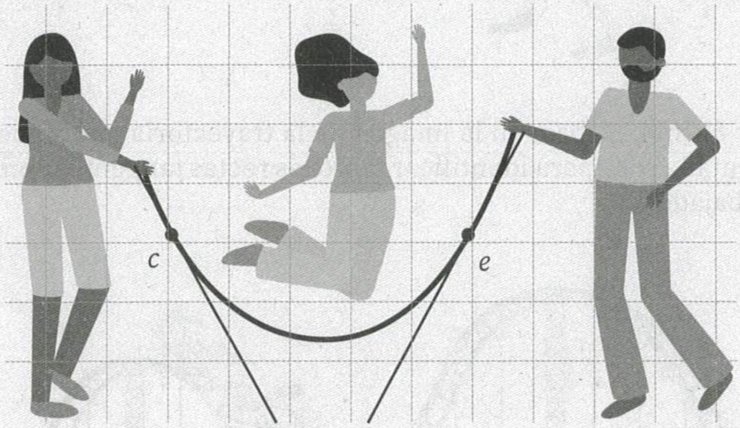
CIERRE

Reto educativo

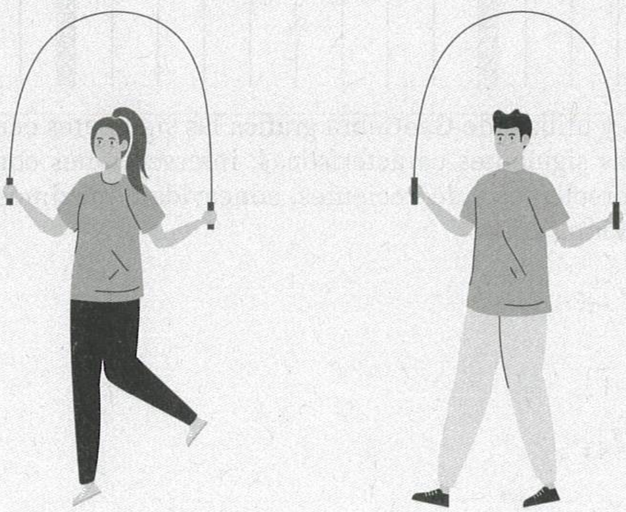
Instrucciones: realiza lo que se te solicita a continuación.

1. Vamos a verificar lo aprendido. Recuerda creciente, decreciente, concavidad hacia arriba o hacia abajo, puntos de inflexión, máximos y mínimos. Para el primer dibujo, están marcadas las rectas tangentes para definir la concavidad. Para el resto de los dibujos deberás hacer lo mismo y marcar los criterios antes mencionados. Finalmente, menciona el tipo de concavidad que presenta.

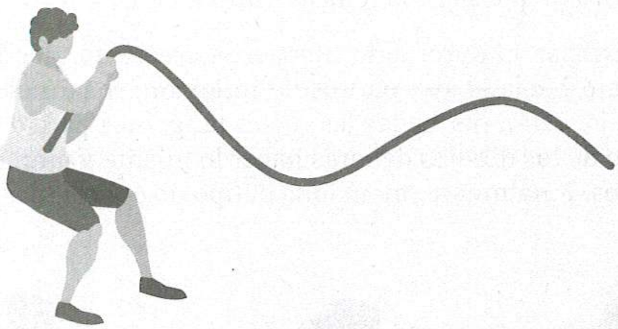
a.



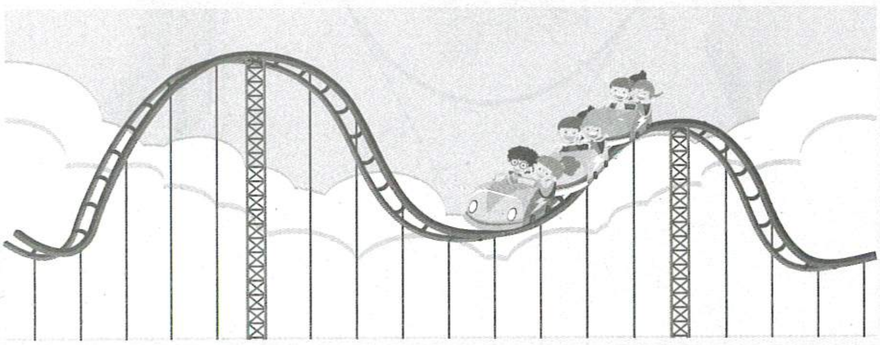
b.



c. Observa el ejercicio de *crossfit,* construye las curvas que salen de hacer este ejercicio para identificar las tangentes en las curvas y el resto de los criterios.



d. Por último, trabaja en la imagen de la trayectoria que sigue el carro de la montaña rusa para identificar tanto las rectas tangentes como los criterios trabajados.

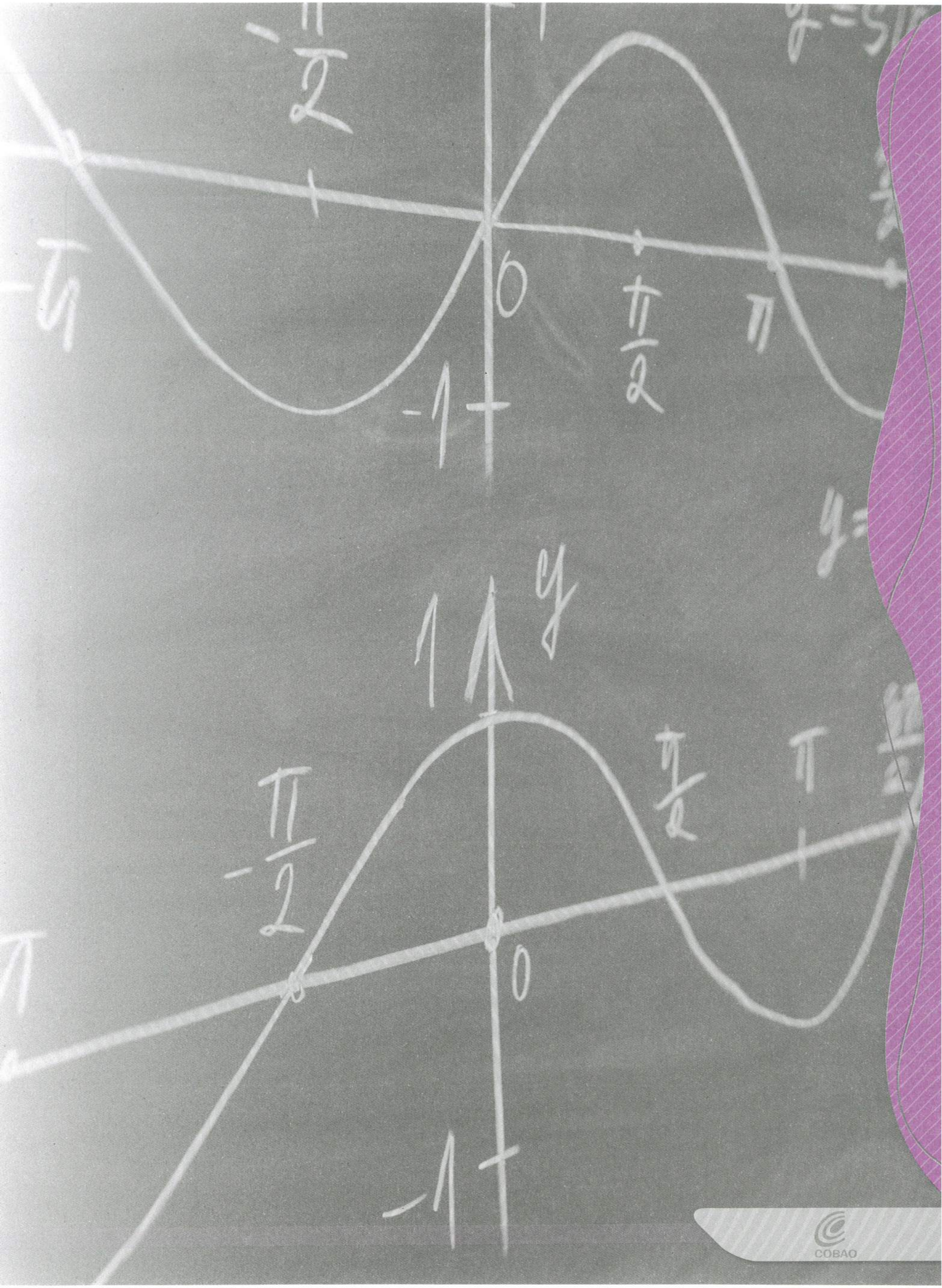


2. En equipos y utilizando GeoGebra grafica las siguientes ecuaciones. Detalla en cada una las siguientes características: intersecciones con los ejes, simetría, intervalos crecientes y decrecientes, concavidad, máximos y mínimos, y puntos de inflexión.

   a. $y=\frac{1}{3}x^3-x$.

   b. $y=x^2-1$.

   c. $y=x^4-4x^3$.



COBAO

PROGRESIÓN 5

Conceptualiza el límite

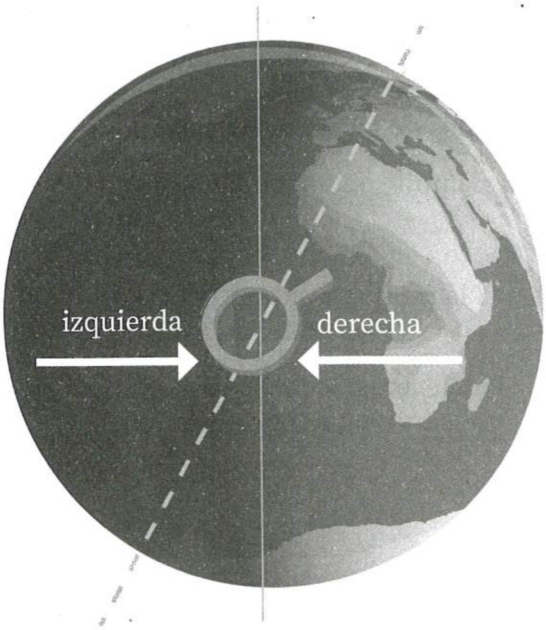
HORAS: 4

... de una función de variable real como una herramienta matemática que permite comprender el comportamiento local de la gráfica de una función.

Metas	Categorías, conceptos transversales	Subcategorías, conceptos científicos asociados
M1 Ejecuta cálculos y algoritmos para resolver problemas matemáticos, de las ciencias y de su entorno.	C1 Procedural.	• S1 Elementos variacionales.
M2 Desarrolla la percepción y la intuición para generar conjeturas ante situaciones que requieren explicación o interpretación.	C2 Procesos de intuición y razonamiento.	• S1 Capacidad para observar y conjeturar. • S2 Pensamiento intuitivo. • S3 Pensamiento formal.
M1 Describe situaciones o fenómenos empleando rigurosamente el lenguaje matemático y el lenguaje natural.	C4 Interacción y lenguaje matemático.	• S1 Registro escrito, simbólico, algebraico e iconográfico. • S2 Negociación de significados.

APERTURA

Hagamos un viaje a la mitad del mundo, a la latitud 0° 0' 0" para tomarnos una foto. ¿Qué opinas? ¿la mitad del mundo es un punto en Quito o una franja? A esta mitad del mundo se la llama el ecuador.



En esta progresión nos convertiremos en exploradores, no solo para encontrar la mitad del mundo, también para comprender si es un punto con exactitud, una franja y comprender el límite que lo representa.

Intentaremos acercarnos al límite del ecuador, primero con una lupa, observando valores pequeños por ambos lados. Luego, lo haremos con un microscopio verificando que cada vez hay más valores infinitos que se acercan al límite buscado.

Observa la franja como la mitad del mundo a la cual nos acercamos por la izquierda o por la derecha, revisando el comportamiento de los valores al punto referido.

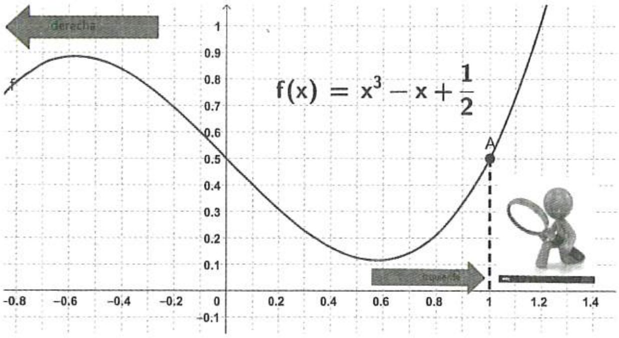
Reto educativo

Instrucciones: con tu docente y en participación con el grupo, comenten qué otras ideas respecto al límite conocen, por ejemplo la orilla de un río antes de cruzarlo, o en la vida cotidiana existen muchos momentos o situaciones en los que identificas un límite, comenta esos ejemplos con tus compañeros. ¿Cómo relacionas la paradoja de Zenón con la idea de la mitad del mundo?

DESARROLLO

¿Qué es un límite?

Decimos que nos acercamos a un punto por la derecha o por la izquierda (***límites laterales***), con valores cada vez más pequeños de forma ***infinitesimal***.



Límite en matemáticas es:

lím

Y la siguiente expresión $x \to a$,
se lee: x tiende a a

Pídele a tu docente que te ayude a leer la siguiente expresión:

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

Ejemplo 1

Vamos a determinar el límite cuando x tiende a 3 de la función $f(x) = x + 1$ (Te sugerimos que en todo momento compares el gráfico con GeoGebra como herramienta de apoyo visual).

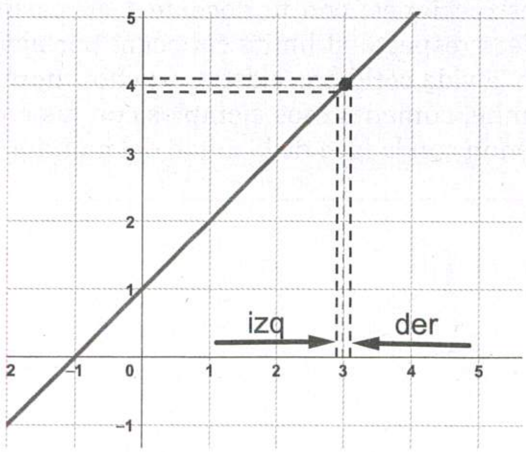
Solución

Hagamos un acercamiento al valor de x cuando tiende a 3 para construir una tabla:

Establecemos los valores que consideramos para acercarnos por la derecha y la izquierda para:

$$f(x) = x + 1$$

x	$f(x)$
2.9	3.9
2.99	3.99
2.9999	3.9999
3.0001	4.0001
3.001	4.001
3.01	4.01



Observa que, tanto por la izquierda como por la derecha, los valores de x cercanos a 3 tienden a 4.

Concluimos

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = 4$$

Se lee: el límite de la función es igual a 4 cuando x tiene a 3 por la izquierda.

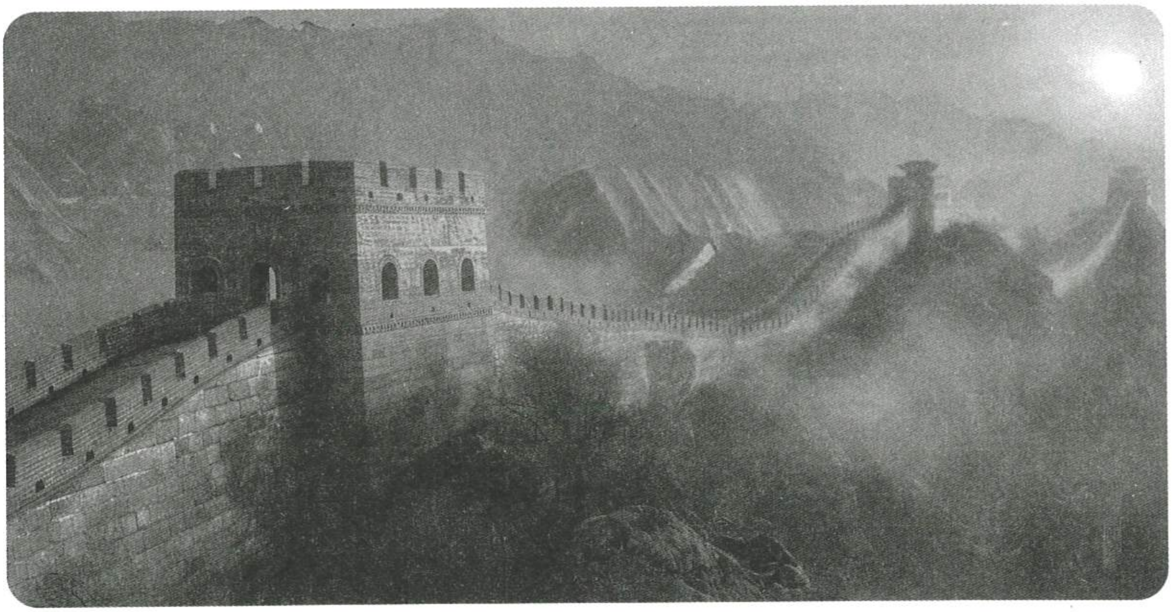
$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = 4$$

Se lee: el límite de la función es igual a 4 cuando x tiene a 3 por la derecha.

Podrías cuestionar el por qué de hacer estos acercamientos si todo se podría resolver simplemente sustituyendo el valor y obtener el resultado de inmediato. Sin embargo, se trata de realizar un análisis minucioso de la situación planteada.

Ejemplo 2

Un límite puede ser una frontera, geográficamente es marcada para delimitar el espacio territorial de dos países, como el río Bravo en el norte.



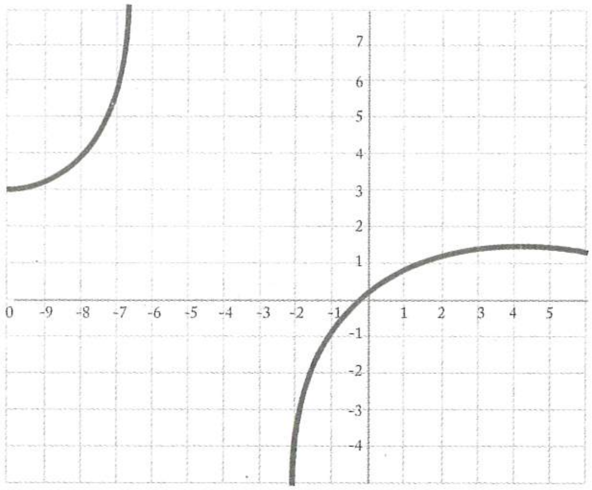
Toda función presenta una continuidad o discontinuidad en su trazo

La continuidad en una gráfica es porque no presenta ruptura o interrupción en su trazo. La discontinuidad la podemos encontrar cuando existe una ruptura o interrupción en el trazo de la gráfica, en ocasiones es evitable y en otras es inevitable. También son gráficas que presentan saltos.

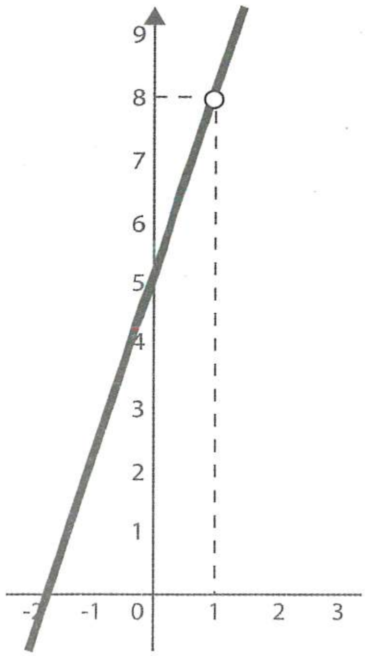
Ejemplo 3

Ejemplo de gráfica discontinua inevitable, generalmente para las funciones racionales

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$



Ejemplo de gráfica discontinua evitable.



Tesoro digital

En tu clase de Cultura digital seguramente te enseñaron a usar GeoGebra, otro recurso es revisar los videos de *Youtube* o algún *TikTok* que te ayude a comprender cómo graficar los límites.

Reto educativo 1

Instrucciones: trabaja en pares, utiliza GeoGebra para graficar y realiza una tabla con valores posibles para la función. Comparte tus resultados con tu grupo.

Dada la función f, construye la tabla para acercarse a 2 por la derecha y por la izquierda.

$$f(x) = \frac{1}{x-2}$$

1. Utiliza tu calculadora para ir sustituyendo los valores en la función.

Acercarse por la izquierda →						← Acercarse por la derecha			
x	0	1.9	1.99	1.999	1.9999	2	2.0001	2.001	2.01
$f(x)$									

   a. ¿Qué sucede en el valor de $x = 2$?

   b. Observa los resultados para indagar el comportamiento de los mismos.

   c. Traza la gráfica en tu libreta para conocer el comportamiento de las curvas.

2. Comenta tu conclusión con tus compañeros una vez que hayas terminado la tabla y la gráfica.

Ejemplo 4

Vamos a determinar el límite cuando x tiende a 5 en la función.

$$f(x)=\frac{x^2-25}{x-5}$$

Solución

Observa la gráfica, en ella puedes checar que en el punto $x=5$ se marca una línea punteada tenue y un círculo vacío, lo cual indica que existe una DISCONTINUIDAD, es decir, que la curva se interrumpe (lo que significa que no existe un resultado real) para $x=5$, puedes comprobarlo al sustituir el valor en la función.

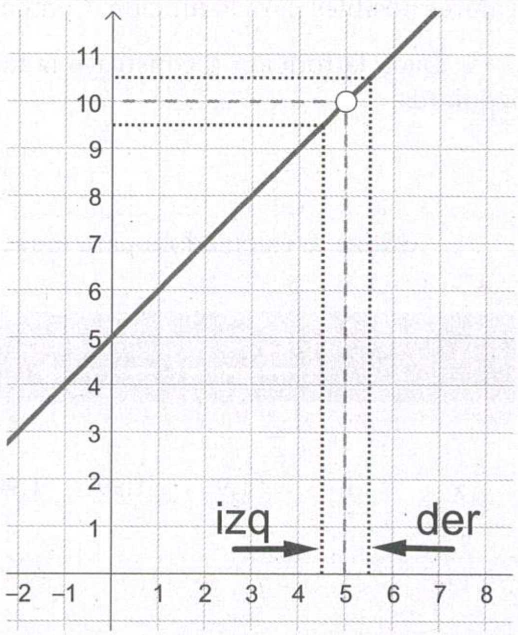
Entonces construimos la tabla, acercándonos por la derecha y la izquierda.

Establecemos los valores cercanos a $x = 5$ por la izquierda y por la derecha:

$$f(x)=\frac{x^2-25}{x-5}$$

x	$f(x)$
4.9	9.9
4.99	9.99
4.9999	9.9999
5	
5.0001	10.0001
5.001	10.001
5.01	10.01

Observa la gráfica:



Para evaluar el límite se debe aplicar el proceso de factorización, dado que al sustituir $x=5$, en la función original no existe un resultado real.

Sustituir $x=5$	$\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-25}{x-5}=\frac{(5)^2-25}{5-5}=\frac{0}{0}$ Este resultado 0/0, no existe, por lo tanto, debemos factorizar.

Factorizando:	$\lim\limits_{x \to 5} \frac{x^2-25}{x-5} = \frac{(x+5)(x-5)}{(x-5)} = x+5$
Nuevo límite:	$\lim\limits_{x \to 5} x+5$
Sustituir $x = 5$	$\lim\limits_{x \to 5} x+5 = 5+5 = 10$

Concluimos

La discontinuidad en $x = 5$ se pudo evitar al reducir la función, quedando evitable en (5,10).

Tesoro digital

En este QR podrás encontrar más ejemplos de Khan Academy.

Reto educativo 2

Instrucciones: ahora vamos a trabajar un poco y descubrir el comportamiento de los límites por aproximación del lado derecho y lado izquierdo. Para ello construye una tabla o tabulador donde puedas observar cómo acercarte a cada valor indicado.

a. $\lim\limits_{x \to -1^+} \frac{3}{x+1}$

b. $\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{x+3}{x-2}$

c. $\lim\limits_{x \to 1^+} x^2 + 3x - 2$

d. $\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{x^2+2x-8}{x-2}$

e. $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x}$

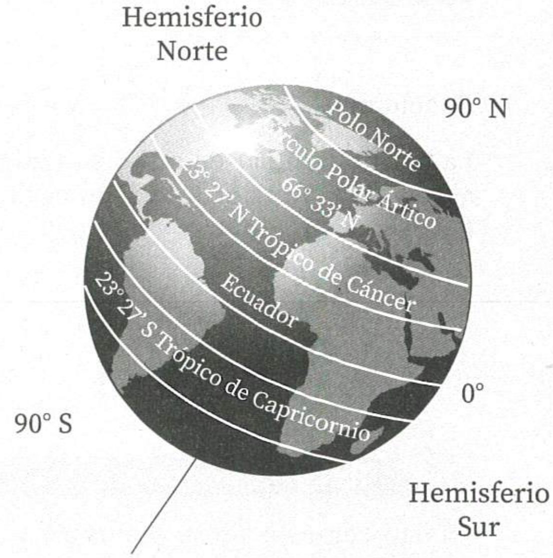
CIERRE

Reto educativo

Instrucciones: las matemáticas son la representación de nuestro entorno, nos sirven para modelar muchos comportamientos y situaciones de la biología, la economía, la estadística, la medicina y muchos más.

Planteamos la pregunta: ¿las matemáticas son un descubrimiento o son un invento?

Observa la imagen e identifica al ecuador y a todas las mediciones de nuestro planeta.



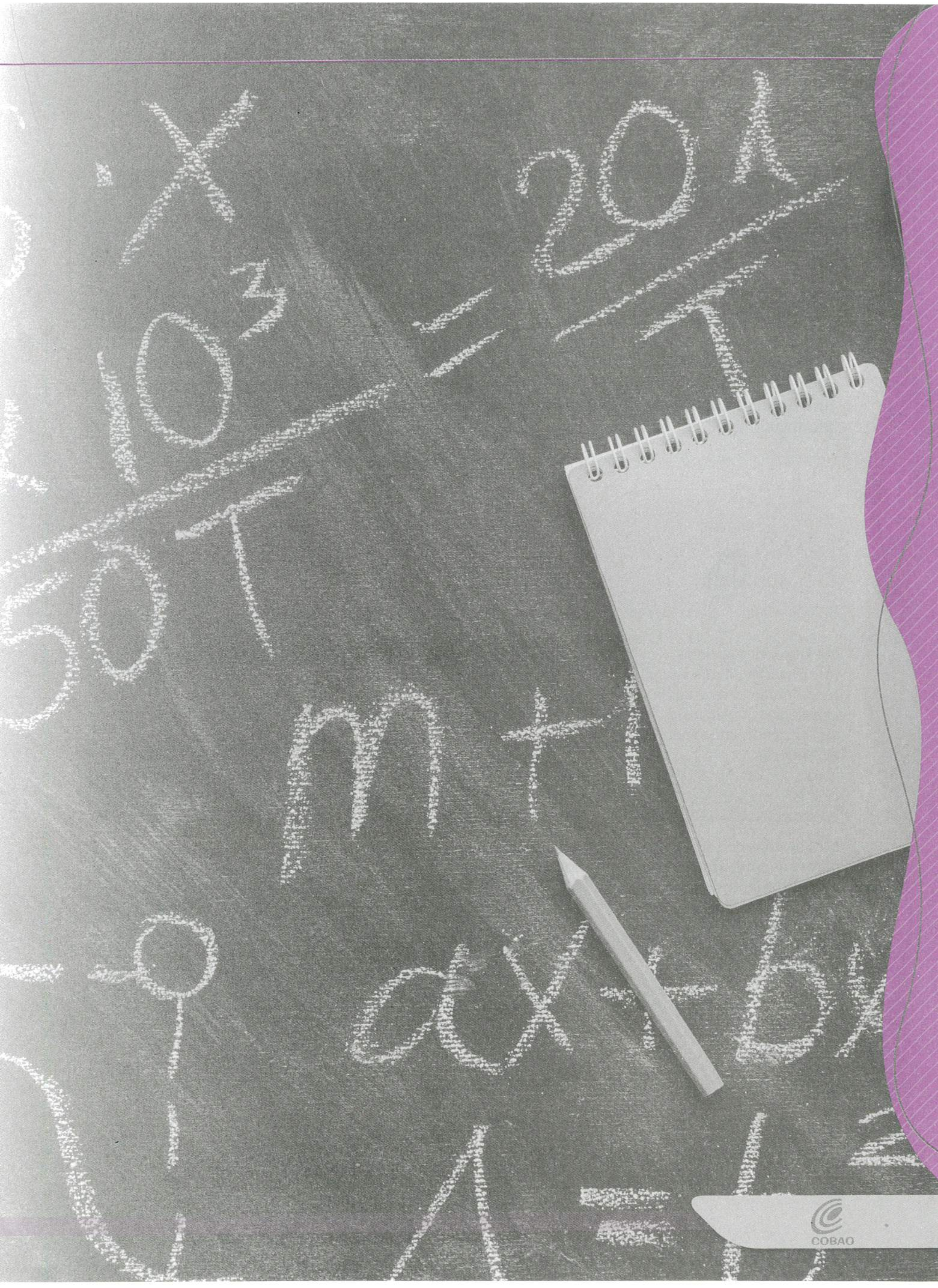
Ahora vamos a compartir algunas conclusiones con tus compañeros:

1. ¿Qué son las matemáticas en nuestro mundo?
2. Menciona los límites que identificas en esta imagen del mundo.
3. Comenta qué crees que sucedería si alcanzaras a tocar un límite, es decir, ¿qué clase de consecuencias existirán al tocar un límite?

Tesoro digital

Para completar tu aprendizaje te sugiero revises el siguiente QR.

Las matemáticas... ¿las descubrimos o las inventamos?



PROGRESIÓN 6

Identifica y contextualiza

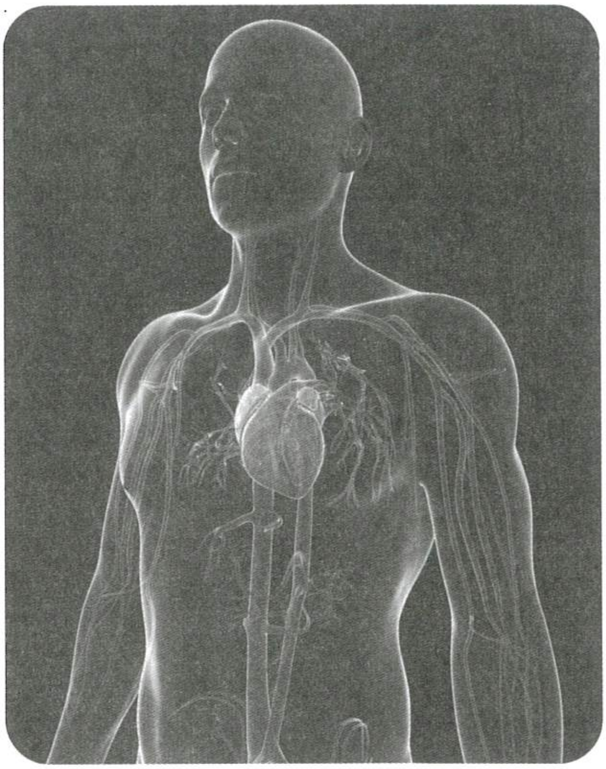
HORAS: 5

...la continuidad de funciones utilizadas en la modelación de situaciones y fenómenos y hace un estudio, utilizando el concepto de límite de las implicaciones de la continuidad de una función, tanto dentro del desarrollo matemático mismo como de sus aplicaciones en la modelación.

Metas	Categorías, conceptos transversales	Subcategorías, conceptos científicos asociados
M1 Observa y obtiene información de una situación o fenómeno para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a entenderlo.	C2 Procesos de intuición y razonamiento.	• S1 Capacidad para observar y conjeturar. • S2 Pensamiento intuitivo.
M2 Socializa con sus pares sus conjeturas, descubrimientos o procesos en la solución de un problema tanto teórico como de su entorno.	C4 Interacción y lenguaje matemático.	• S3 Ambiente matemático de comunicación.

APERTURA

La propuesta de estudio de esta progresión es "Identifica y contextualiza la continuidad de funciones utilizadas en la modelación de situaciones y fenómenos". Por tanto, lo abordaremos desde la idea de continuidad y discontinuidad. Desde la progresión anterior introducimos el término de continuidad que ahora retomaremos.



En la revista *Muy Interesante* se explica que:

> El corazón impulsa la sangre por el sistema circulatorio, que forma una red de casi 100 000 kilómetros, es decir, dos veces y media la circunferencia terrestre (40 000 km). Aproximadamente, la octava parte de este flujo sanguíneo es conducido al cerebro, y el resto recala en otras partes del organismo (Fernández, 2009).

Reto educativo

Instrucciones: en condiciones de una persona sana podemos decir que el flujo de sangre es continuo.

- ¿Cuáles serían las condiciones que interrumpen el flujo de sangre?
- ¿Cuál es el estudio que sirve para medir el ritmo cardiaco?
- ¿Cuántos litros de sangre por minuto bombea el corazón?
- ¿En qué momento podemos decir que el flujo de sangre es discontinuo?
- En condiciones de reposo en tu silla, durante un minuto registra cuantas pulsaciones realiza tu corazón.

Comenta con tu docente y compañeros si existe algún intervalo que pueda aplicarse al flujo de sangre continuo.

DESARROLLO

Continuidad de funciones

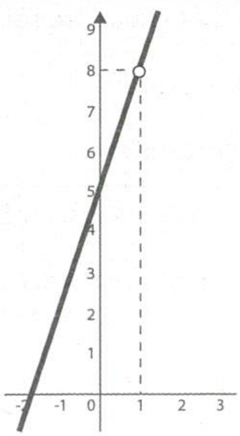
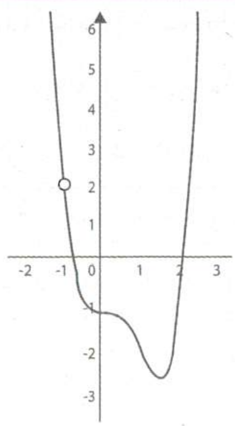
"Podemos decir en términos sencillos que la continuidad es dibujar una gráfica sin despegar el lápiz del plano".

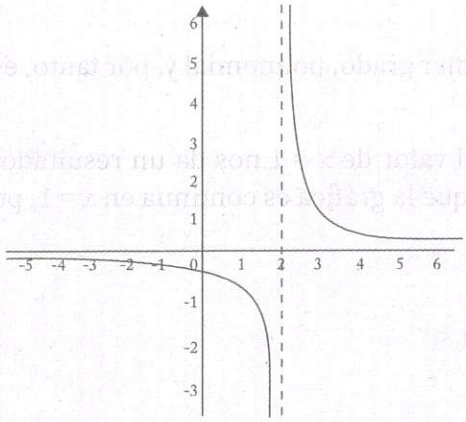
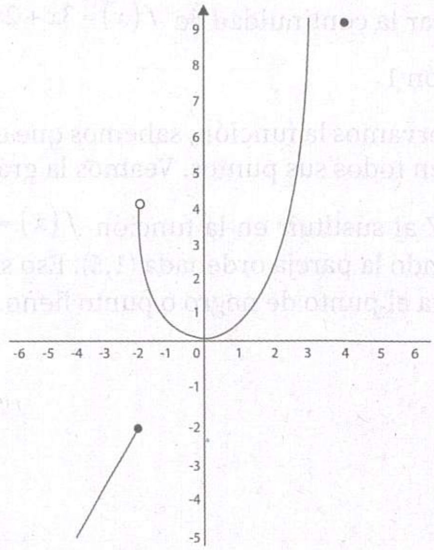
Observa el esquema para conocer la continuidad de las funciones

- Continuidad de Funciones
  - Funciones continuas
  - Funciones discontinuas
    - Discontinuidad evitable o removible
    - Discontinuidad de salto finito
    - Discontinuidad de salto infinito
      - Asíntota

Reto educativo 1

Instrucciones: para estos ejercicios tomarás en consideración la observación sobre el trazo de la gráfica y, con apoyo de tu docente podrás concretar el tipo de discontinuidad que identificas. Es necesario trabajar en equipo.

Tipo de discontinuidad:	Tipo de discontinuidad:
	

Tipo de discontinuidad:	Tipo de discontinuidad:
	

Observando el comportamiento de las gráficas de la actividad anterior, podemos decir que de manera intuitiva ***las funciones polinomiales son continuas***, dadas las siguientes propiedades:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

- Si $f(x) = P(x)$, su dominio son todos los números reales.
- Si $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, para todos los valores de $Q(x) \neq x$.
- Si $f(x) = \sqrt[n]{P(x)}$, dado que n sea impar, su dominio son los números reales, o *n* par su dominio son aquellos valores donde el radicando sea positivo o cero.

De manera formal todas las funciones deberán cumplir con las siguientes condiciones ***f*(*x*)** para ser considerada continua:

Para que una $f(x)$ sea continua en el punto $x_0 \in \mathbb{R}$.

a. $f(x_0)$ está definida

b. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existe

c. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

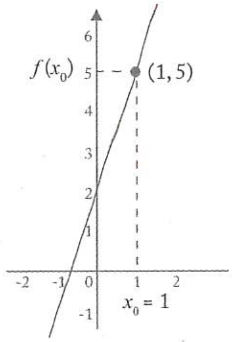
Ejemplo 1

Verificar la continuidad de $f(x)=3x+2$, en $x_0=1$

Solución 1

Si observamos la función, sabemos que es de primer grado, polinomial y, por tanto, es continua en todos sus puntos. Veamos la gráfica.

Y al sustituir en la función $f(x)=3x+2$ el valor de $x=1$ nos da un resultado de 5, formando la pareja ordenada (1,5). Eso significa que la gráfica es continua en $x=1$, por eso se pinta el punto de negro o punto lleno.



Solución 2

Utilizamos las condiciones para comprobar la continuidad.

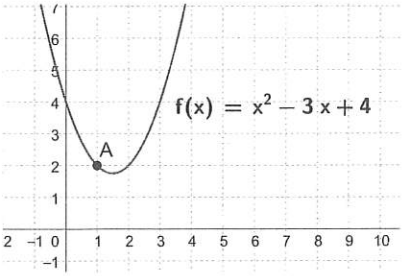
Condición	Comprobación	Conclusión
$f(x_0)$	Para $x_0=1$ en $f(x)$ $f(1)=3(1)+2=5$	Decimos que $f(x)$ está definida en $x_0=1$ Es decir que nos dio un resultado real.
$\lim_{x\to x_0} f(x)$	$\lim_{x\to 1} 3x+2=3(1)+2=5$	Decimos entonces, $\lim_{x\to 1} f(x)$ sí existe y $\lim_{x\to 1} f(x)=5$
$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$	Como $\lim_{x\to 1} f(x)=5$ y $f(1)=5$	Entonces $\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)$ Por consiguiente $f(x)$ es continua en $x_0=1$

Conclusión

Por consiguiente $f(x)$ es continua en $x_0=1$, dado que cumple con las tres condiciones.

Ejemplo 2

Verifica la continuidad de la función polinomial $f(x) = x^2 - 3x + 4$



Solución

Dado que $x = 1$ se sustituye en la función $f(1) = (1)^2 - 3(1) + 4 = 2$.

Se puede decir que la función es continua para $x = 1$.

Ejemplo 3

Determina si la función racional $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 24}{x^2 - 36}$ es continua para $x = 6$ y verifica en la gráfica la continuidad.

Solución

Vamos a avanzar en la comprensión de los pasos.

1. Evaluar la función para $x = 6$

$$f(3) = \frac{(6)^2 - 2(6) - 24}{(6)^2 - 36} = \frac{0}{0}$$

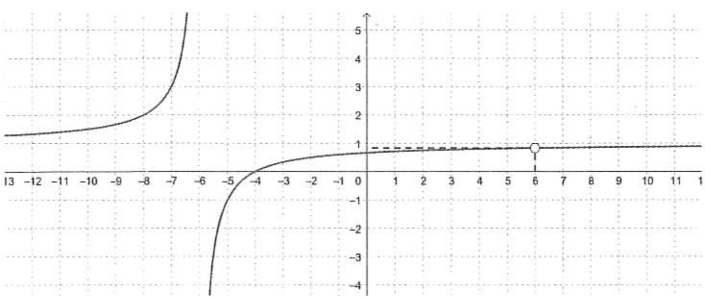
El resultado 0/0 indica que la función NO ESTÁ DEFINIDA en $x = 6$, entonces se debe simplificar a partir de una factorización para eliminar la continuidad.

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 24}{x^2 - 36} = \frac{(x-6)(x+4)}{(x-6)(x+6)} = \frac{x+4}{x+6}, \text{ si } x \uparrow 6$$

$$\lim_{x \to 6} \frac{x+4}{x+6} = \frac{10}{12} = 0.8\overline{333}$$

Conclusión

La gráfica es una función racional con discontinuidad evitable en $x = 6$.



Ejemplo 4

Determina si la función es continua para $x = 1$ y $x = 4$.

$$f(x) = \begin{cases} 3x+1, & si\, x < 1 \\ x+3, & si\, 1 \le x < 4 \\ \dfrac{1}{x-4}, & si\, x > 4 \end{cases}$$

Solución

Descifrando a $f(x)$, colocamos sobre una recta los intervalos y las funciones según sus intervalos, esto con propósito de ubicar cuánto nos podemos acercar al valor por la izquierda o por la derecha.

$f(x)=3x+1$	$f(x)=x+3$	$f(x)=\dfrac{1}{x-4}$
$x < 1$	$1 \le x < 4$	$x > 4$
Por la izquierda	Por la derecha	

$$^{-}1^{+} \qquad\qquad ^{-}4^{+}$$

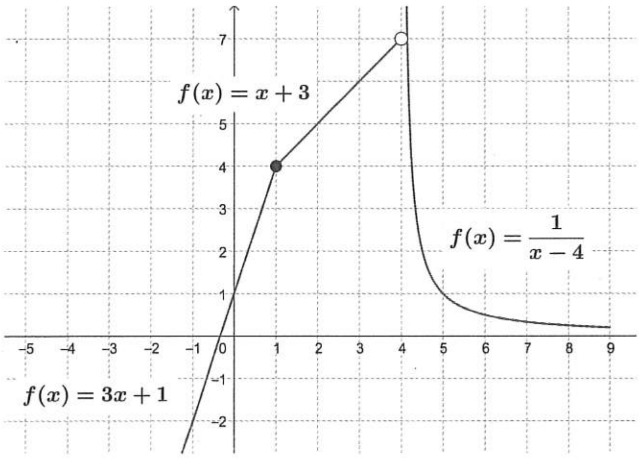
Entonces, comprobamos el límite para las funciones, considerando los valores por la izquierda y por la derecha según la ubicación que ya se planteó:

Para $x = 1$	Para $x = 4$
Para $x = 1$ es:	
$\lim\limits_{x\to 1} x+3 = 1+3 = 4$	Ahora probaremos si es continua para $x = 4$
Cuando x tiende a 1, el límite es 4.	
Calculamos los límites laterales: Cuando x tiende a 1 por la izquierda	Calculamos los límites laterales: Cuando x tiende 4 por la izquierda
$\lim\limits_{x\to 1^-} 3x+1 = 3+1 = 4$	$\lim\limits_{x\to 4^-} x+3 = 4+3 = 7$
Cuando x tiende a 1 por la derecha	Cuando x tiende a 4 por la derecha
$\lim\limits_{x\to 1^+} x+3 = 1+3 = 4$	$\lim\limits_{x\to 4^+} \dfrac{1}{x-4} = \dfrac{1}{4-4} = \dfrac{1}{0} = +\infty$

Para $x = 1$	Para $x = 4$
Conclusión: como los límites laterales coinciden con el resultado inicial, decimos que la función es continua en $x = 1$.	Conclusión: como los resultados de los límites son diferentes, decimos que la función es discontinua en $x = 4$.

Observamos la gráfica:

Utiliza como herramienta de apoyo a GeoGebra para verificar la gráfica.



Reto educativo 2

Instrucciones: en parejas, plantea la solución para la siguiente situación, incluyendo el uso de GeoGebra.

1. Un negocio de copias tiene en la entrada un anuncio con los siguientes precios, según el volumen de las copias requeridas.

No de copias	$/ Copia
0-100	0.75
101-200	0.50
Más de 201	0.35

Plantea la función para cada precio, incluyendo su intervalo, y analiza la continuidad. Asimismo, construye su gráfica.

Es importante compartir los resultados con tu docente y compañeros para llegar juntos a una misma solución.

2. Revisando el Reglamento de la Ley de Movilidad de la secretaría de movilidad del estado de Oaxaca, la velocidad máxima en la ciudad es de 50 km/h, y de 30 km/h en zonas como escuelas y hospitales.

La multa por exceder el límite de velocidad en la ciudad es de 10 UMAS[1] por cada kilómetro. Para este ejercicio se establece que también se cobrará multa por manejar por debajo de los 30 km/h.

Expresa el monto de la multa $f(x)$ en términos de la velocidad (x) y trazar la gráfica.

3. Determina la continuidad o discontinuidad de las funciones siguientes, traza sus respectivas gráficas usando GeoGebra.

a. $f(x)=\begin{cases} x^3+x^2+2, & x<1 \\ x+3, & x\geq 1 \end{cases}$

b. $f(x)=\dfrac{x-8}{x^2-64}$, para $x_0=8$

c. $f(x)=3x-1$, para $x_0=2$

d. $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x+2}$, para $x_0=-2$

1 La UMA (Unidad de Medida y Actualización) es la medida sobre la cual se realizan los cálculos de obligaciones federales. Esta referencia económica reemplazó al salario mínimo, ahora en el reglamento marca que serán de 10 a 20 UMAS. Cada una tiene un valor referencial de 108.57 pesos, en el 2024.

CIERRE

Antes de cerrar esta progresión vamos a analizar una de las situaciones de la actividad anterior.

Recordando el cartel del negocio de copias:

No. de copias	$/ copia
0-100	0.75
101-200	0.50
Más de 201	0.35

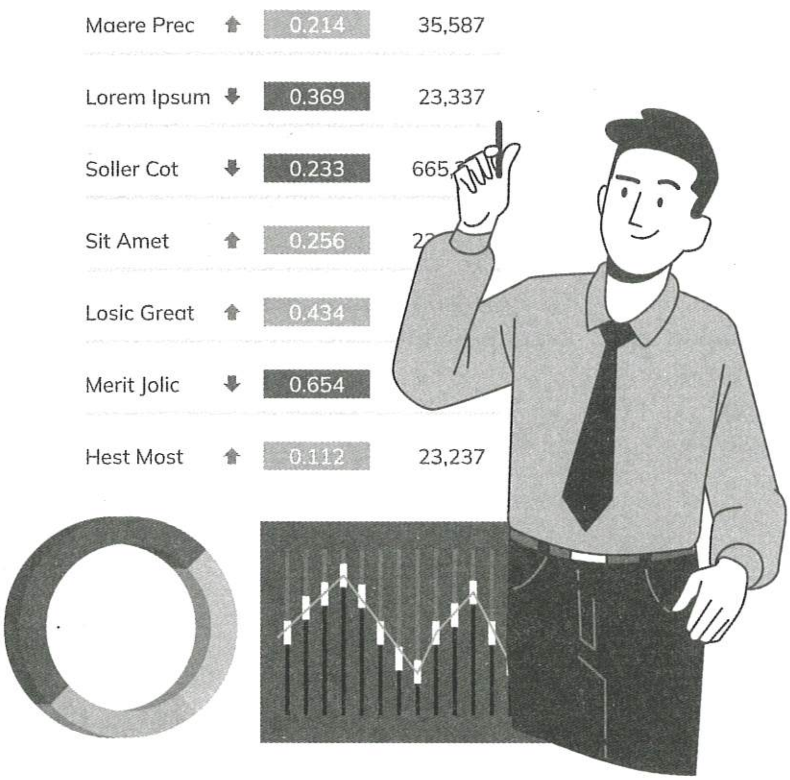
Vamos a armar la expresión algebraica en términos de función, con la cual podemos comprender el precio de las copias dependiendo de la cantidad que se requiere. A esta función se le denomina función a trozos.

Compara tus resultados con el resto del grupo y con ayuda de tu docente construye la gráfica.

$$f(x)=\begin{cases} 0.75x, & si\ \ 0 \le x \le 100 \\ 0.50x, & si 101 \le x \le 200 \\ 0.35x, & si\ \ x \ge 201 \end{cases}$$

Tesoro digital

Para complementar tu aprendizaje puedes visitar la página del QR.



PROGRESIÓN 7

Interpreta diferentes perspectivas y métodos

HORAS: 5

... el concepto central del cálculo diferencial, "la derivada", de forma intuitiva e intenta dar una definición formal, así como la búsqueda heurística para encontrar la derivada de la función constante, lineal y algunas funciones polinomiales.

Metas	Categorías, conceptos transversales	Subcategorías, conceptos científicos asociados
M2 Analiza los resultados obtenidos al aplicar procedimientos algorítmicos propios del Pensamiento Matemático en la resolución de problemáticas teóricas y de su contexto.	C1 Procedural.	• S2 Elementos geométricos. • S3 Elementos variacionales.
M2 Desarrolla la percepción y la intuición para generar conjeturas ante situaciones que requieren explicación o interpretación.	C2 Procesos de intuición y razonamiento.	• S1 Capacidad para observar y conjeturar. • S2 Pensamiento intuitivo.

APERTURA

En esta progresión nos acercaremos a la interpretación del concepto central del cálculo diferencial y a partir de algunos métodos o de forma intuitiva poder calcular la primera derivada.

En la vida cotidiana nos hacemos estas preguntas:

1. ¿En promedio cuántos minutos haces de tu casa a la escuela?
2. ¿Cuál es el promedio de costo de una computadora?
3. En promedio, ¿a cuánto corre el kilómetro Checo Pérez?

Y cuando queremos saber lo que sucede en un instante preciso usamos la primera derivada para calcular ese momento, para lo cual necesitamos definir algunos conceptos y observar el comportamiento de la situación.

Ejemplo 1

En la nueva carretera que va desde el municipio de Oaxaca de Juárez a Puerto Escondido se tiene una distancia de 191 km y se ha calculado un tiempo de viaje de 2hr 52 min.

La velocidad promedio de viaje se calcula con la fórmula de:

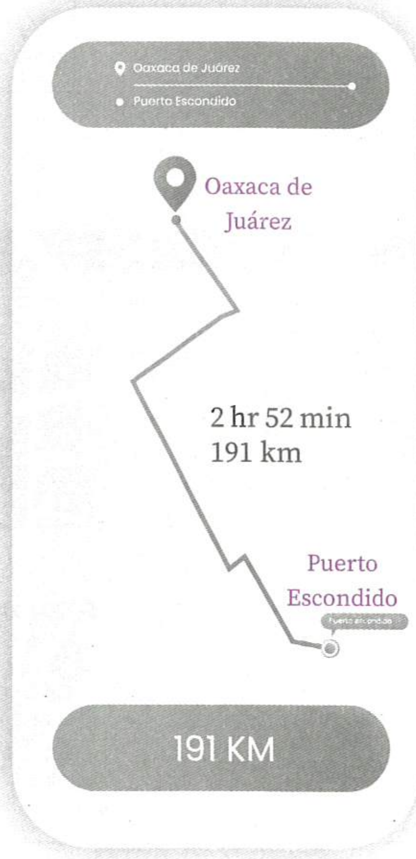
$$v = \frac{d}{t} = \frac{191km}{2.52h} = 75.7km/h$$

Esto significa que si vas al volante no debes rebasar los 75.7 km/h.

Sin embargo, durante el trayecto esta velocidad promedio definitivamente no es constante, ya que hay arena suelta, tráfico, animales cruzando y otros obstáculos que hacen que bajes la velocidad, por lo tanto, no podemos decir que todo momento te desplazas a 75.7 km/h, en ocasiones disminuyes la velocidad y otras se puede aumentar.

"La primera derivada permite calcular la velocidad instantánea en cualquier segundo durante el viaje".

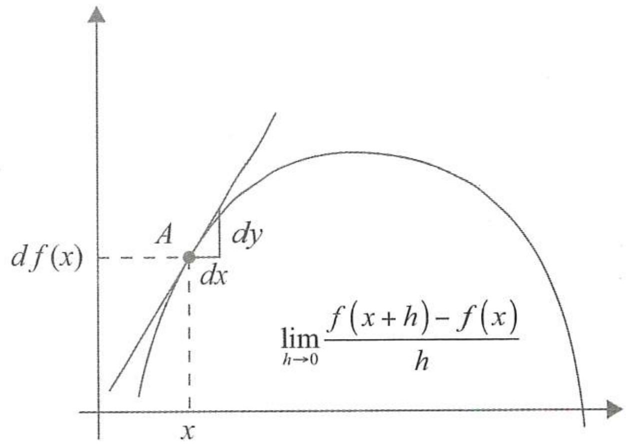
Así que pasamos de una velocidad promedio a una velocidad instantánea.



Representación geométrica de la velocidad instantánea

Volviendo al tema de velocidad instantánea, observa la gráfica. En el desarrollo de la progresión veremos cómo calcular la pendiente de la recta tangente que representa la primera derivada de una función.

Con ello podemos calcular la velocidad en un momento determinado, por ejemplo, la velocidad en el segundo 20 o en el minuto 3, si así lo quisieras.



DESARROLLO

El cálculo se refiere al estudio de los cambios de las situaciones, nos permite tener una mente dinámica para observar y registrarlos, posteriormente estudiarlos y modelarlos.

Es muy útil en estudios de física, de medicina, de economía, en astronomía, en el comportamiento social, en la química, biología y muchas áreas más. Un ejemplo muy común es el crecimiento de ratones y la cantidad de gatos que hay para controlar la plaga. Ambas variables dependen según persista la situación, a número mayor de gatos menor población de ratones, lo cual significa que ambas variables deben tener relación entre sí.

Tesoro digital

Revisa el siguiente enlace QR que te ayudará a revisar el proceso histórico de la derivada y sus aplicaciones. El video "¿Qué es el cálculo?" realizado por la Facultad de ciencias de la UNAM, lo puedes encontrar en cualquiera de los dos links:

Tesoro digital

Es momento de complementar la información para continuar. Revisa el video del QR donde podrás observar la interpretación gráfica de la variación de las variables.

"La derivada es una razón de cambio de una variable con respecto a otra".

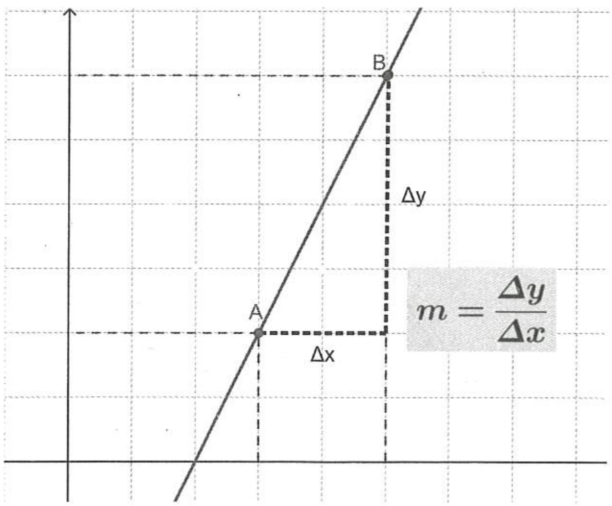
El cálculo diferencial es la herramienta poderosa para estudiar las curvas a partir de las rectas y partiendo del trazo de la recta tangente a dicha curva se puede calcular la velocidad instantánea.

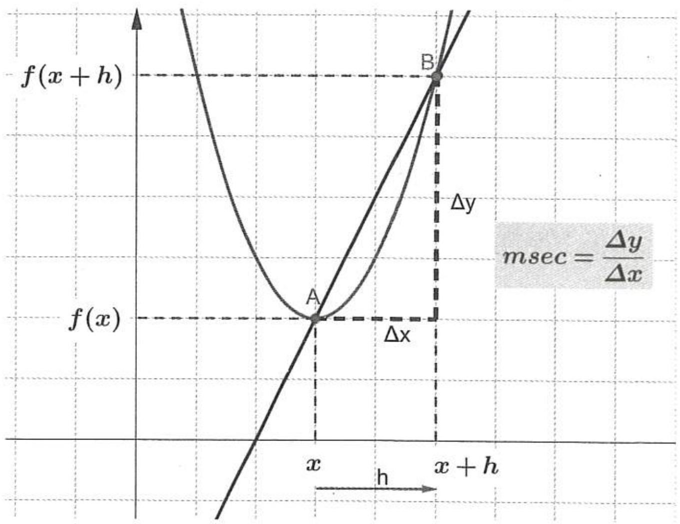
Estudio de la recta

Veamos... para estudiar una recta se utiliza la razón de cambio de y con respecto a x, y se denomina pendiente $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, su trazo geométrico está representado por:

Estudio de la curva

Se observa la gráfica donde a la curva se la traza una recta secante, y es la pendiente de la recta secante a la curva.





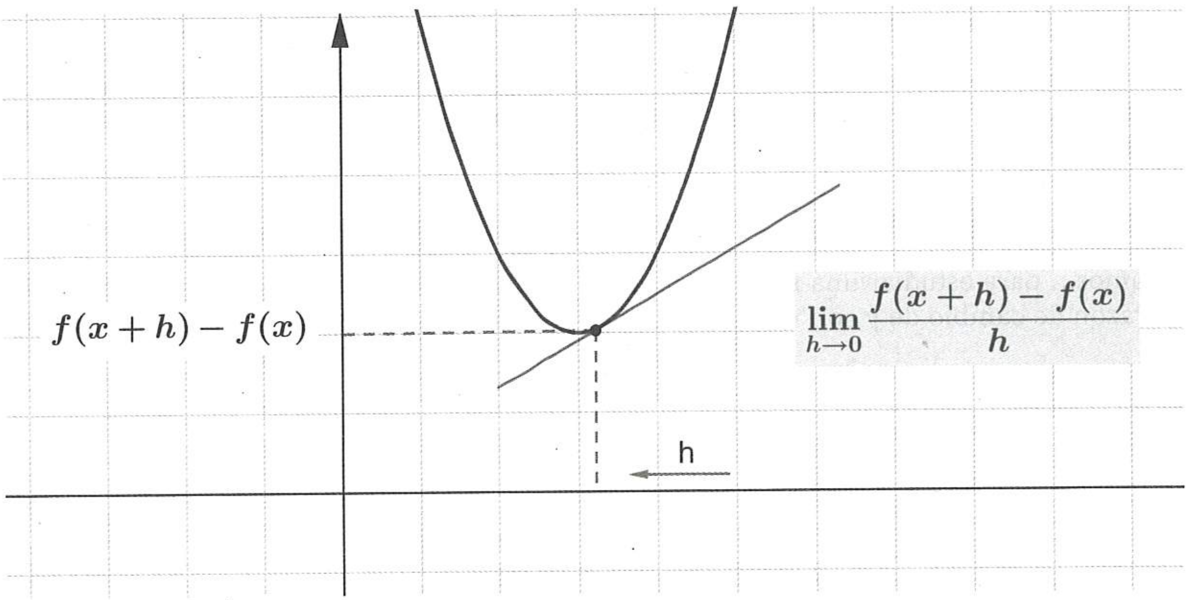
Definición geométrica de la recta tangente

Ahora llevaremos $h = 0$ para tener la pendiente de la recta tangente a la curva.

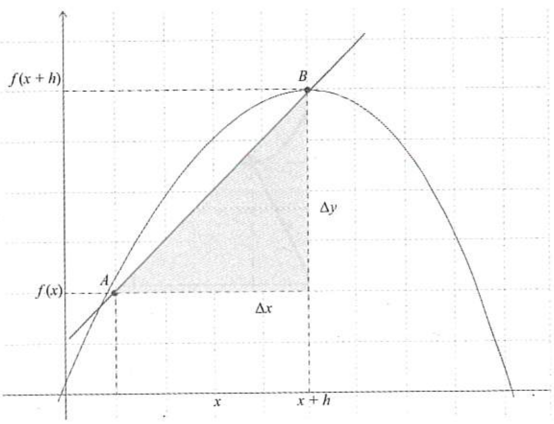
Es importante saber que $\boldsymbol{h}$ también es Δx

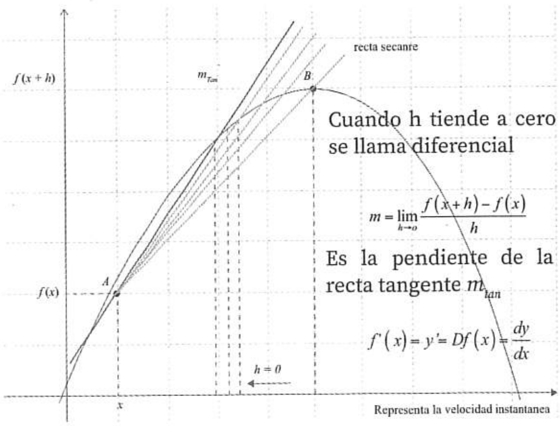
$$m_{tan} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

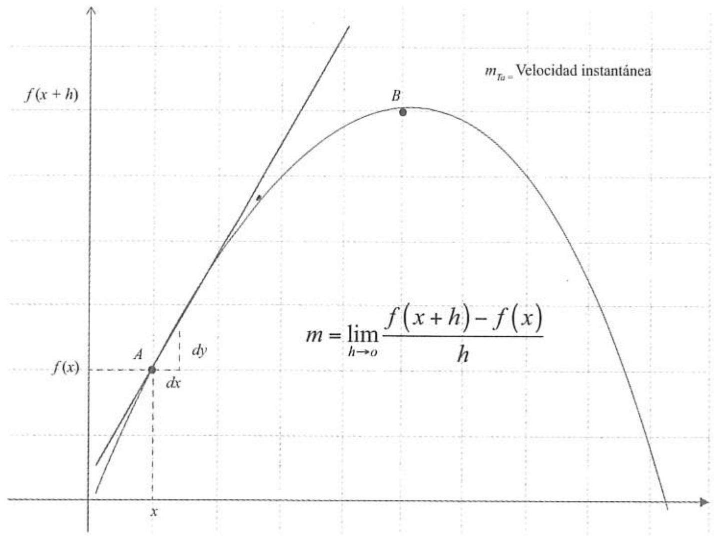
$$m_{tan} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$



Aquí se presenta el proceso de la pendiente de la recta secante a la recta tangente con otra curva.







A la pendiente de la recta tangente cuando h tiende a cero, se llama ***"la primera derivada"***

La derivada se usa para modelar situaciones que tienen cambios continuos, como la variación de la temperatura, el crecimiento o decrecimiento de una población, la distancia con respecto al tiempo entre otros.

"La derivada es una razón de cambio"

Notación de derivada

Se lee: la derivada de la función f con respecto a x es...

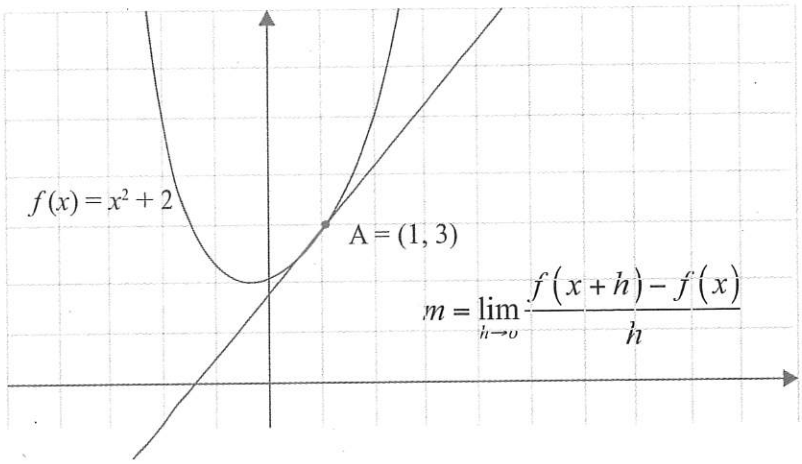
Matemático	Notación de primera derivada
Lagrange	$f'(x)$
Leibniz	$\frac{dy}{dx}$
Cauchy	$D_x f$

Ejemplo 2

Calcular la pendiente de la recta tangente a la función $f(x) = x^2 + 2$, en el punto A(1,3) y determinar la ecuación de la recta tangente.

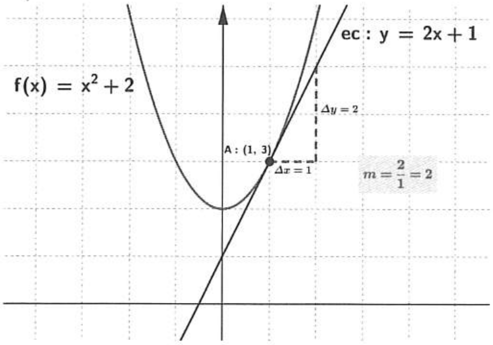
Procedimiento

Observa la gráfica para ubicar la función f y el punto de tangencia.



Definimos:	$m_{tan} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$
1er paso: $f(x+h) = (x+h)^2 + 2$	$= x^2 + 2hx + h^2 + 2$
2° paso: $f(x+h) - f(x)$	$= x^2 + 2hx + h^2 + 2 - (x^2 + 2)$ $= x^2 + 2hx + h^2 + 2 - x^2 - 2$ $= 2hx + h^2$ $h(2x + h)$
3er paso: $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$	$= \frac{h(2x+h)}{h}$ $= 2x + h$
4° paso: $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$	$\lim_{h \to 0} 2x + h = 2x + 0 = 2x$
Se calcula el valor de la pendiente en el punto A(1,3)	$f'(x) = m_{tan} = 2x$ $m_{tan} = 2(1) = 2$

Observa la gráfica para ubicar geométricamente el trazo de la pendiente y calcula la ecuación de la recta tangente que pasa por el punto A(1,3)



Calculando la ecuación de la recta tangente:

La ecuación de la recta tangente se calcula tomando $m = 2$ y A(1,3), revisa los cálculos:

Se sustituye en la ecuación de recta punto pendiente,

$$\boldsymbol{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

$$y - 3 = 2(x - 1)$$

$$y - 3 = 2x - 2$$

$$y = 2x - 2 + 3$$

La ecuación de la recta tangente en el punto A es:

$$\boldsymbol{y = 2x + 1}$$

Ejemplo 3

Calcular la pendiente de la recta tangente a la función $f(x) = \frac{1}{x}$ en el punto $A(1,1)$ y determinar la ecuación de la recta tangente.

Procedimiento

Vamos a realizar el procedimiento un poco más fluido, esperamos podamos avanzar juntos.

Definimos: $$\boldsymbol{m_{tan} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

1er paso:

$\boldsymbol{f(x+h)}$ $= \frac{1}{(x+h)}$

2° paso:

$$f(x+h)-f(x)$$

$$=\frac{1}{(x+h)}-\frac{1}{(x)}$$

$$=\frac{(x)-(x+h)}{(x+h)x}$$

$$=\frac{x-x-h}{(x+h)x}$$

$$=\frac{-h}{(x-h)x}$$

3er paso:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\frac{-h}{h(x-h)x}$$

$$=\frac{-1}{(x-h)x}$$

4° paso:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{-1}{(x-h)x}=\frac{-1}{(x-0)x}=-\frac{1}{x^2}$$

Se calcula el valor de la pendiente en el punto **A**(1,1).

$$m_{tan}=-\frac{1}{x^2}=-\frac{1}{(1)^2}=\frac{-1}{1}=-1$$

Calculando la ecuación de la recta tangente:

La ecuación de la recta tangente se calcula tomando $m = -1$

y $A(1, 1)$, revisa los cálculos:

Se sustituye en la ecuación de recta punto pendiente, $y - y_1 = m(x - x_1)$ y se realizan los cálculos necesarios.

$$y-(1)=-1(x-1)$$

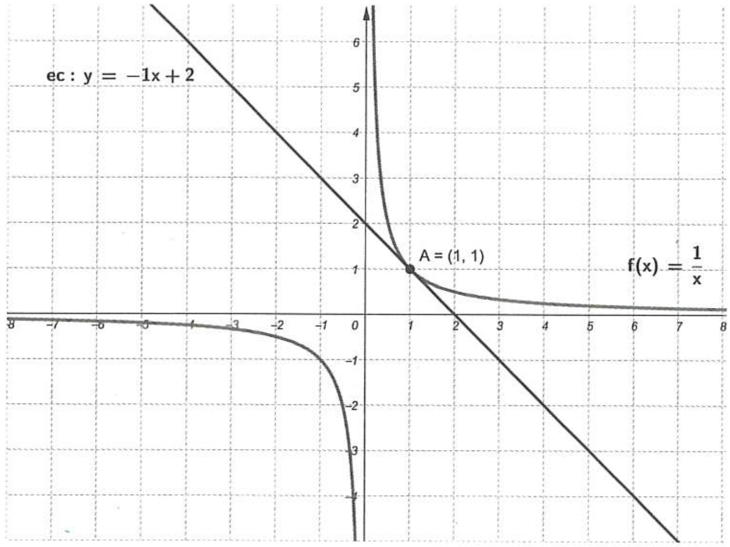
$$(y-1)=-x+1$$

$$y=-x+1+1$$

La ecuación de la recta tangente en el punto A es:

$$y=-x+2$$

Observa la gráfica para ubicar la función f y el punto de tangencia.



A este proceso se le denomina:

REGLA DE LOS CUATRO PASOS PARA DERIVAR

$$m_{tan} = \frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

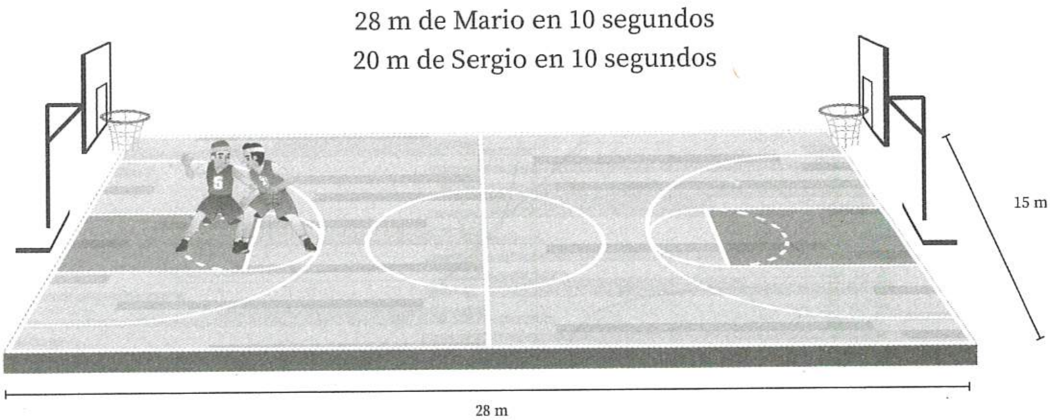
$$\overset{4^{er}\text{ paso}}{\lim_{h\to 0}}\frac{\overset{1^{er}\text{ paso}}{f(x+h)} - \overset{2^{er}\text{ paso}}{f(x)}}{\underset{3^{er}\text{ paso}}{h}}$$

Ejemplo 4

En física son utilizados los términos de velocidad promedio, por ejemplo, temperatura promedio y con el apoyo del estudio del cálculo infinitesimal se obtiene la velocidad instantánea y aceleración de situaciones planteadas.

Supongamos que estamos en una cancha de basquetbol, en la cual al tomar el balón debajo de la canasta se corre al otro extremo para intentar encestar. La distancia más larga, de canasta a canasta, es de 28 metros que se recorren en 10 segundos.

Mario recorre en 10 segundos el total de la cancha hasta llegar a la otra canasta, mientras que Sergio recorre solo 20 metros.



La velocidad promedio se puede obtener con nuestra mágica fórmula de $v = \frac{d}{t}$.

Planteamiento

Mario recorre en 10 segundos 28 metros, significa que en promedio iba a una velocidad de:

$$v = \frac{28s}{10s} = 2.8\ m / s$$

Sergio recorre en esos mismos 10 km tan solo 20 metros, significa que en promedio iba a una velocidad de $v = \frac{20m}{10s} = 2m\ / s$

Entonces la velocidad instantánea es la primera derivada de la función velocidad, donde existe una variación de la distancia con respecto al tiempo y es posible calcular para cada segundo que se requiera conocer.

Podemos preguntarnos, en el segundo 3 qué velocidad llevaba Mario en ese momento, y así plantearnos para el segundo 5 o segundo 8, por poner algunos ejemplos.

Reto educativo 1

Instrucciones: trabaja los siguientes planteamientos en grupos o pares.

1. De las siguientes funciones calcula la pendiente de la recta tangente y la ecuación de la misma. Utiliza GeoGebra como herramienta de apoyo al graficar cada curva y la recta tangente.

   a. $f(x) = x^2 - 4$ en el punto A(-3, 5)

b. $g(x) = -x^2 - 2x$ en el punto A(-2, 0)

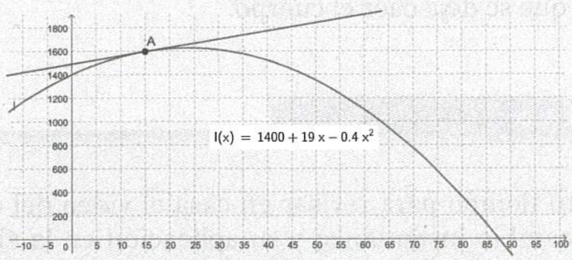
c. $h(x) = \frac{2}{x}$ en el punto A(-2, -1)

d. $i(x) = \frac{1}{x+3}$ en el punto A(-2, 1)

2. En la capacitación del área de administración, se ha decidido realizar un taller de ingresos y utilidades. Los participantes se organizaron en equipos de trabajo para vender 40 panqués a un precio unitario de $35 pesos. Al vender al por mayor, aceptaron bajar el precio en $8 pesos y con ello poder vender 20 panqués más. La función Ingreso se describe de la siguiente manera:

$$I(x) = (40 + x)\left(35 - 8\left(\frac{x}{20}\right)\right)$$

$$I(x) = 1400 + 19x - 0.4x^2$$



a. Contesta las preguntas. Trabaja en equipo o pares en todo momento.
- La variable x ¿qué significado tiene en la gráfica?
- La variable y ¿qué significado tiene en la gráfica?
- Construye una tabla para identificar los ingresos a la venta de 5, 10, 15 panqués.
- Calcula la pendiente de la recta tangente en la venta de 12 panqués.
- Calcula el promedio de ingresos por vender entre 13 y 21 pastelillos.

3. La función de posición para lanzar hacia arriba un globo de agua, desde el techo de tu casa, es $f(t) = 2.5 + 13.86t - 4.9t^2$.

a. Calcula la velocidad instantánea en el segundo $t = 1$, $t = 2$ y $t = 3$.

b. ¿A los cuántos segundos llega al suelo?

4. Se lanza un misil a nivel del suelo mismo que describe un movimiento tipo tiro parabólico oblicuo, con una velocidad inicial de 100 m/s, la función posición considerando la aceleración de la gravedad es de $f(t) = -4.9t^2 + 100t$.

a. Calcula la velocidad instantánea que lleva el misil en el segundo $t = 4$ s.

CIERRE

Vamos a retomar algunos temas importantes de física, dado que la física relaciona todo con las matemáticas, y por supuesto, no pueden estar separadas una de la otra.

Recordaremos la ley de la caída libre de los cuerpos sobre la tierra, que está dada por la función altura $h = -\frac{1}{2}gt + vt + H$.

Vamos a poner atención en la aceleración de la gravedad. Dada a nivel del mar se considera como $9.8\frac{m}{s^2}$.

- h: es la altura en metros.
- v: la velocidad inicial en metros por segundo.
- g: es la aceleración de la gravedad.
- t: el tiempo en segundos al iniciar el movimiento.
- H: la altura a la que se deja caer el cuerpo.

Reto educativo

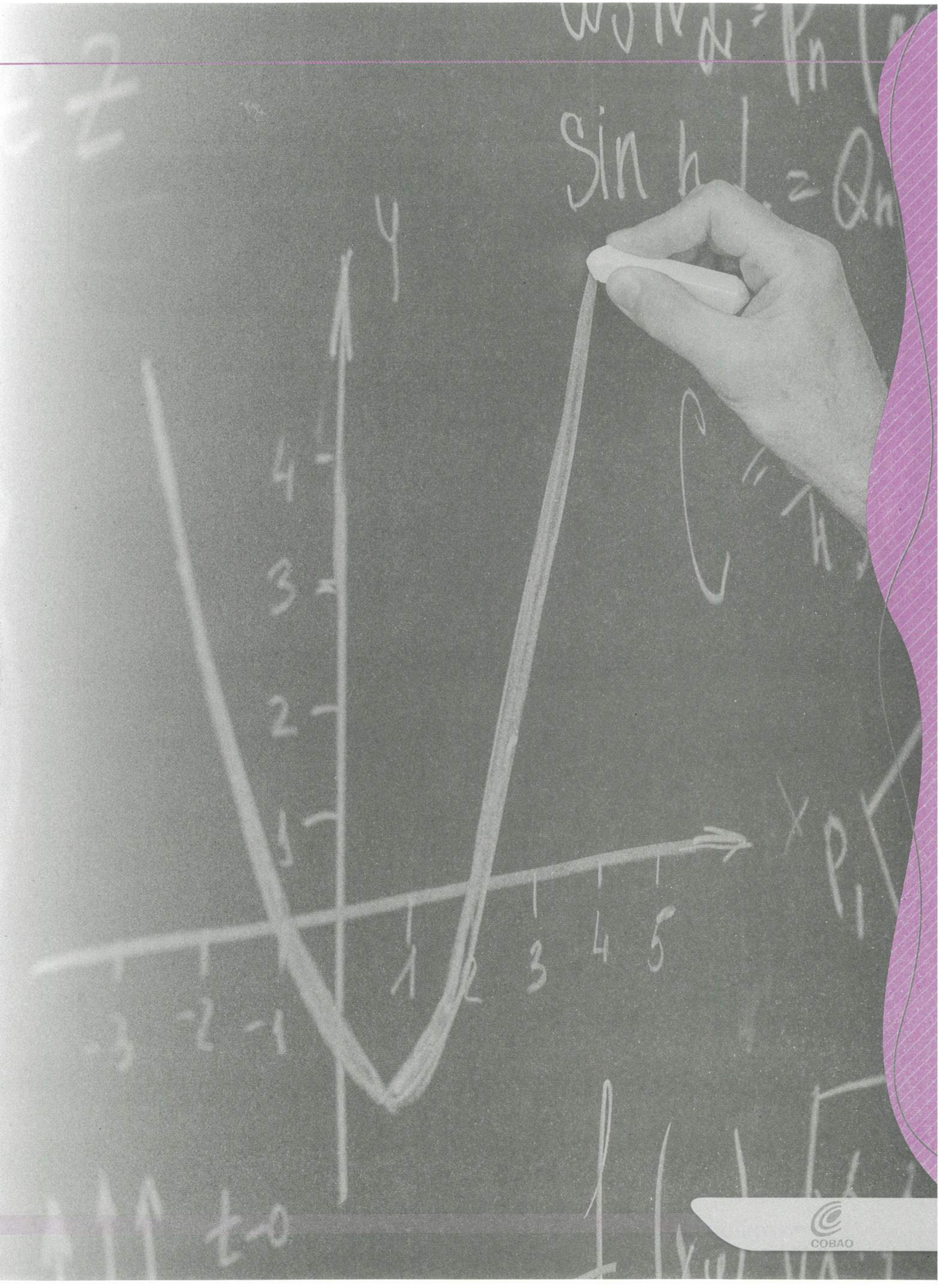
Instrucciones: toma tu tiempo para revisar en casa el video del código QR para comprender la razón de cambio instantáneo y su aplicación en la vida cotidiana, realiza algunas anotaciones en tu libreta ya que en las siguientes progresiones será necesario tener esta información.

1. ¿Qué es la derivada?
2. ¿Qué representa la primera derivada y la segunda derivada?
3. ¿Dónde se puede aplicar la primera derivada?

Tesoro digital

ASOMBROSAS APLICACIONES de la DERIVADA y el CÁLCULO

¿Realmente son IMPORTANTES LAS DERIVADAS?



PROGRESIÓN 8

Encuentra de manera heurística

HORAS: 4

...algunas reglas de derivación como la regla de la suma, la regla del producto, la regla del cociente y la regla de la cadena y las aplica en algunos ejemplos.

Metas	Categorías, conceptos transversales	Subcategorías, conceptos cientificos asociados
M3 Compara hechos, opiniones o afirmaciones para organizarlos en formas lógicas útiles en la solución de problemas y explicación de situaciones y fenómenos.	C2 Procesos de intuición y razonamiento.	• S1 Capacidad para observar y conjeturar. • S2 Pensamiento intuitivo. • S3 Pensamiento formal.
M4 Construye y plantea posibles soluciones a problemas de Áreas de Conocimiento, Recursos Sociocognitivos, Recursos Socioemocionales y de su entorno, empleando técnicas y lenguaje matemático.	C3 Solución de problemas y modelación.	• S3 Estrategias heurísticas y ejecución de procedimientos no rutinarios.

En esta progresión nos adentraremos en la demostración heurística de algunas reglas de derivación.

APERTURA

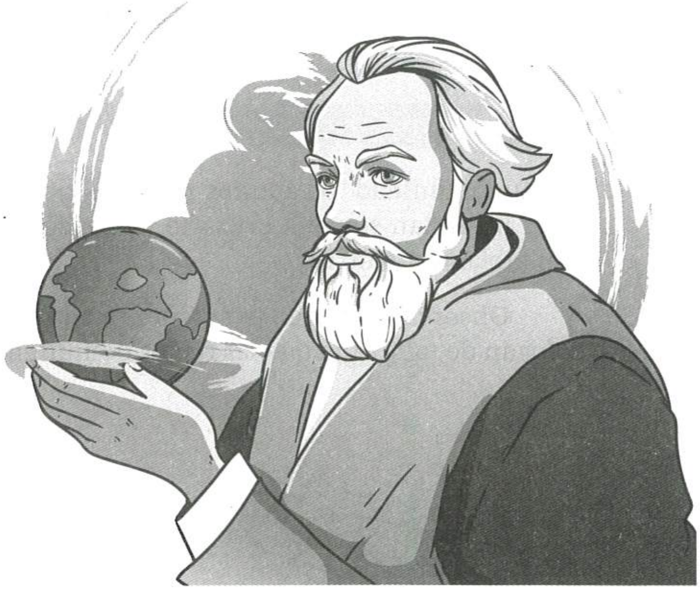
La ciencia y la tecnología amigas de las matemáticas.

1. ¿Cómo funciona un video juego?
2. ¿Conoces la lógica de tu celular para realizar llamadas?
3. ¿Cuál es el proceso para elaborar una vacuna?

Y así podemos hacer muchas preguntas, como cuestionar el funcionamiento de la tecnología y los algoritmos bajo los cuales nuestras aplicaciones nos muestran nuestros intereses o gustos a partir del registro de un patrón de consultas frecuentes.

No olvides que somos observadores, que si queremos que la tecnología siga avanzando nosotros debemos seguir estudiando, modelando, probando, experimentando y analizando el mundo real y con ello construir representaciones con símbolos que describan nuestro entorno. ¡Mente científica!

La naturaleza está escrita en lenguaje matemático



Tesoro digital

El video del QR te platica las matemáticas en todo nuestro mundo. Toma tu tiempo, pues con ello podrás acercarte a la heurística.

¿Qué son las matemáticas?

Vamos a observar a nuestro mundo, el comportamiento y ciertos patrones que presenta, como por ejemplo los pétalos de las flores, el color de cierta especie de aves, incluido nuestro comportamiento social ante los gustos en géneros musicales.

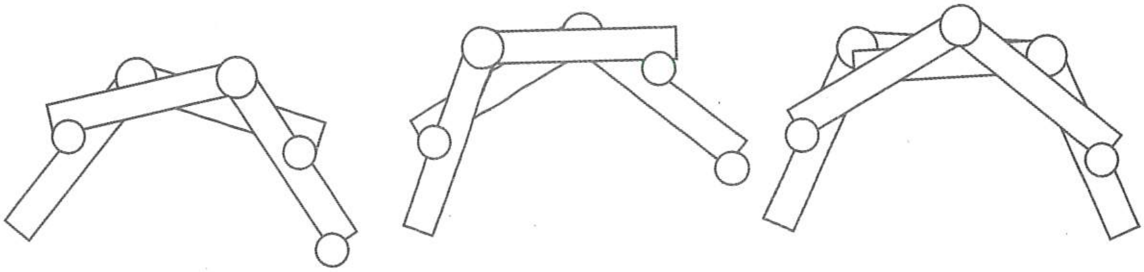
Entonces encontramos que han sido traducidos o representados por símbolos y modelados, describiendo leyes como las de Newton, teoremas como el de Pitágoras o postulados como los de Euclides, teorías como las de Einstein con axiomas y definiciones, hasta construir nuevas propuestas que definan nuestro avance científico, tecnológico, social, biológico, médico, químico y por consiguiente mejoren las condiciones de vida, incluso hacerla más cómoda.

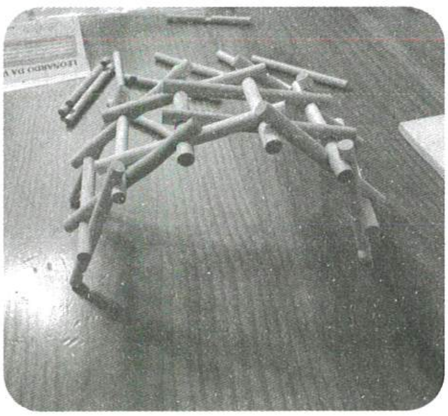
Un poco más observadores, un poco más científicos, un poco más analíticos de nuestro entorno para propuestas futuras.

Ejemplo

En tu comunidad los adultos mayores tienen la necesidad de pasar un arroyo y dada su edad no es tan sencillo cruzarlo, entonces los pobladores proponen construir un puente con tablas de madera.

Observa la imagen para tener una idea de la posible construcción, donde las tablas se colocan de tal forma que las rectas delimiten la curva al puente.





Flash educativo

En la historia del estudio de las matemáticas, muchas ideas se fueron gestando a lo largo de varios años y compartirlas no fue tan sencillo debido a la distancia y el tiempo que tardaban en llevar las cartas de un lugar a otro.

De pronto se encontraron que algunos estudios ya se estaban realizando en alguna otra parte y coincidían en algunos planteamientos, conclusiones o propuestas, lo que generaba suspicacia al pensar que se había robado las ideas.

Así, se armó una de las peleas más épicas entre dos grandes matemáticos: Newton y Leibniz en el estudio del cálculo infinitesimal; sin embargo, ya con anterioridad algunos más habían realizado contribuciones como Galileo, Kepler, Descartes, Fermat... y posteriormente harían más estudios y propuestas.

DESARROLLO

...Entonces Arquímedes gritó ¡EUREKAAA! al encontrar la forma de medir el volumen cuando se sumergió en su bañera.

Podemos decir que el método heurístico tiene todo que ver con el Eureka de Arquímedes.

Tesoro digital

Entonces... ¿a quién se atribuye el cálculo infinitesimal?

Revisa el QR en el Tesoro digital para que conozcas la lucha de Newton con Leibniz en sus propuestas matemáticas.

Un método heurístico es un proceso cognitivo y reflexivo para identificar alternativas de solución o conjeturas hacia una determinada situación.

"Promover la práctica de la ciencia y la tecnología en cada estudiante es una oportunidad de mejorar nuestro entorno"

Vamos a deducir algunas de las reglas de derivación a partir de la Heurística.

Entonces ya podrás darte una idea de qué es la heurística, y que incluso la usaremos para deducir algunas reglas de derivación a partir de la expresión de la pendiente de la recta tangente.

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

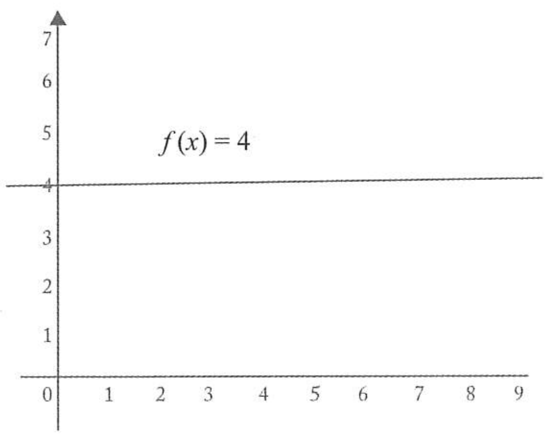
Deducción de algunas reglas de derivación

1. Regla para derivar una constante

$$f(x)=c$$

La representación gráfica de una función constante es una recta paralela al eje x, donde cualquier valor asignado para x converge en la misma constante.

Dada la función $f(x)=4$ la representación gráfica es:



A partir de la pendiente de la recta tangente, haremos la demostración algebraica para deducir la regla de la derivada para una constante.

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Ejemplo 1

Dada $f(x) = 4$ entonces

$$f(x) = 4$$

$$f(x+h) = 4$$

Sustituimos los valores:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{4-4}{h} = \frac{0}{h}$$

Para $h \neq 0$ entonces,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{4-4}{h} = \frac{0}{h} = 0$$

Por lo tanto, la primera derivada de la función constante es

$$f'(c) = 0$$

Ejemplo 2

Dada $f(x) = -7$ entonces

$$f(x) = -7$$

$$f(x+h) = -7$$

Sustituimos los valores:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{-7-(-7)}{h} = \frac{0}{h}$$

Para $h \neq 0$ entonces,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{-7+7}{h} = \frac{0}{h} = 0$$

Por lo tanto, la primera derivada de la función constante es

$$f'(c) = 0$$

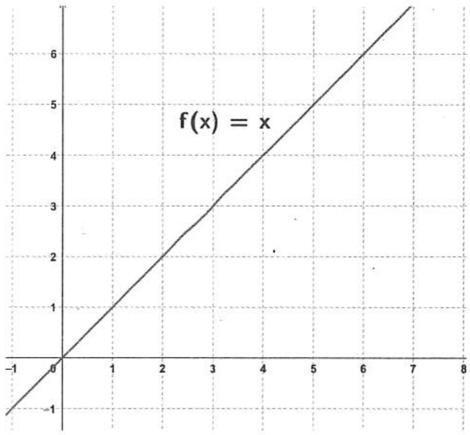
La deducción de la regla de derivación para una constante es:

$$\frac{d(c)}{dx} = 0$$

2. Regla para derivar la función identidad

$$f(x) = x$$

La representación gráfica de una función identidad se puede observar enseguida.



A partir de la pendiente de la recta tangente, haremos la demostración algebraica para deducir la regla de la derivada para x.

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Deducción

Dada $f(x) = x$ entonces

$f(x) = x$

$f(x+h) = x + h$

Sustituimos los valores:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{x + h - x}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1$$

Por lo tanto, la primera derivada de la función lineal es

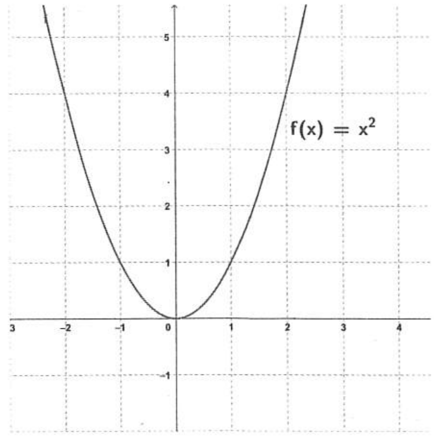
$$f'(x) = 1$$

La deducción de la regla de derivación para la función identidad es:

$$\frac{d(x)}{dx} = 1$$

3. Regla para derivar la función dada una potencia para x

La representación gráfica de una función cuadrática $f(x) = x^2$ es:



A partir de la pendiente de la recta tangente, haremos la demostración algebraica para deducir la regla de la derivada para una función cuadrática.

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Ejemplo 3

Dada $\boldsymbol{f(x) = x^2}$ entonces

$f(x) = x^2$

Sustituimos los valores:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

Y se desarrolla el binomio para posteriormente simplificar:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2hx + h^2 - \cancel{x^2}}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{2hx + h^2}{h}$$

Se factoriza h para simplificar:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(2x+h)}{\cancel{h}}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} 2x + h$$

Validamos para $h = 0$

$$f'(x) = 2x + 0$$

Por lo tanto, la primera derivada de la función cuadrática es:

$$f'(x) = 2x$$

El desarrollo de un binomio al cuadrado es:

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Ejemplo 4

Dada $f(x) = x^3$ entonces

$f(x) = x^3$

$f(x+h) = (x+h)^3$

En el desarrollo de un binomio al cubo puedes usar el triángulo de Pascal o el binomio de Newton.

Sustituimos los valores:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$

Y se desarrolla el binomio para posteriormente simplificar:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x^3} + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - \cancel{x^3}}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h}$$

Se factoriza h para simplificar:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(3x^2 + 3xh + h^2)}{\cancel{h}}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} 3x^2 + 3xh + h^2$$

Validamos para $h = 0$

$$f'(x) = 3x^2 + 3x(0) + (0)^2$$

Por lo tanto, la primera derivada de la función cúbica es:

$$f'(x) = 3x^2$$

Tesoro digital

Revisa la liga para aprender a desarrollar binomios al cubo.

Revisemos los resultados de estos ejemplos y propondremos los resultados de otros más, para poder establecer una conclusión como regla de derivación.

Función	Primera derivada
$f(x)=x^2$	$f'(x)=2x$
$f(x)=x^3$	$f'(x)=3x^2$
$f(x)=x^4$	$f'(x)=4x^3$
$f(x)=x^5$	$f'(x)=5x^4$

Observa cómo los exponentes se colocan a nivel de la variable y las potencias se disminuyen en una unidad.

La deducción de la regla de derivación para la función $\boldsymbol{f(x)=x^n}$:

$$\boldsymbol{f'(x)=nx^{n-1}}$$

Flash educativo

Para el desarrollo de binomios a la n potencia se utiliza el triángulo de Pascal que, además, ayuda para realizar otras demostraciones, como en los números poligonales, en la sucesión de Fibonacci, en los fractales, para el cálculo de probabilidades, entre otras más.

Tesoro digital

En el enlace conocerás la magia del triángulo de Pascal y cómo se visualiza con otras áreas de las matemáticas, incluyendo los números poligonales.

Atrévete a aprender más.

Reto educativo 1

Instrucciones: prueba cada función utilizando la definición de derivada para deducir la regla solicitada.

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

a. $f(x) = 5x^2$

b. $f(x) = -3x^4$

c. $f(x) = \frac{1}{2}x^3$

1. Trabaja en tu libreta y en parejas deduce la regla de derivación para $f(x) = c.x^n$
2. Comparte con tus compañeros tu propuesta.

Esta actividad deberá cerrarse con la guía de tu docente para verificar que la regla ha sido adecuadamente deducida.

CIERRE

Tabla de reglas de derivación	
$\frac{d}{dx}[c] = 0$	$\frac{d}{dx}[u \pm v] = \frac{d}{dx}[u] \pm \frac{d}{dx}[v]$
$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$	$\frac{d}{dx}[sen\, x] = \cos x$
$\frac{d}{dx}[x] = 1$	$\frac{d}{dx}[\cos x] = -sen\, x$
$\frac{d}{dx}[c.v] = c\frac{d}{dx}[v]$	$\frac{d}{dx}[u \cdot v] = u\frac{d}{dx}[v] + v\frac{d}{dx}[u]$
$\frac{d}{dx}[\sqrt{x}] = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\frac{d}{dx}\left[\frac{u}{v}\right] = \frac{v\frac{d}{dx}[u] - u\frac{d}{dx}[v]}{v^2}$

Reto educativo

Instrucciones: ahora es necesario practicar el desarrollo y cálculo de las derivadas para las siguientes funciones, comparte tus resultados en clase para corroborar que sean correctos. Es importante aclarar tus dudas, practica la confianza en ti mismo para preguntar.

a. $f(x) = 9$

b. $f(x) = \sqrt{x}$

c. $f(x) = 7x^3 - x^2 + 5x - 2$

d. $f(x) = x^2\, Sen x$

e. $f(x) = \sqrt{4x}$

f. $f(x) = -x^2 + 3x + 1$

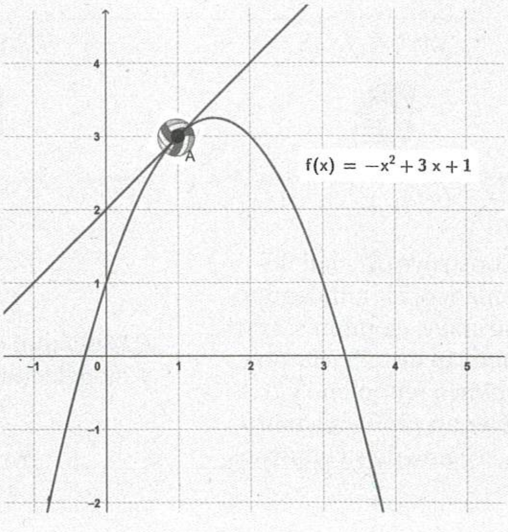
Reto educativo

Instrucciones: en la práctica de voleibol estamos aprendiendo a hacer servicios desde el área de saque. Las medidas de la cancha son de 18 metros de largo por 9 de ancho, un servicio lleva una trayectoria de $f(x) = -x^2 + 3x + 1$. Responde:

a. ¿Cuál es la velocidad de la pelota en el segundo uno?

b. ¿La pelota alcanzó a cruzar la red?

c. ¿Cuál es la altura máxima de la pelota?



Tesoro digital

Te invitamos a revisar el enlace, encontrarás la relación de las matemáticas y la vida real.

Date el tiempo en casa o en alguna hora libre dentro de tu horario de revisar el enlace que te proponemos.

PROGRESIÓN 9

Selecciona una problemática

HORAS: 5

...en la que el cambio sea un factor fundamental en su estudio para aplicar el concepto de la derivada como razón de cambio instantánea.

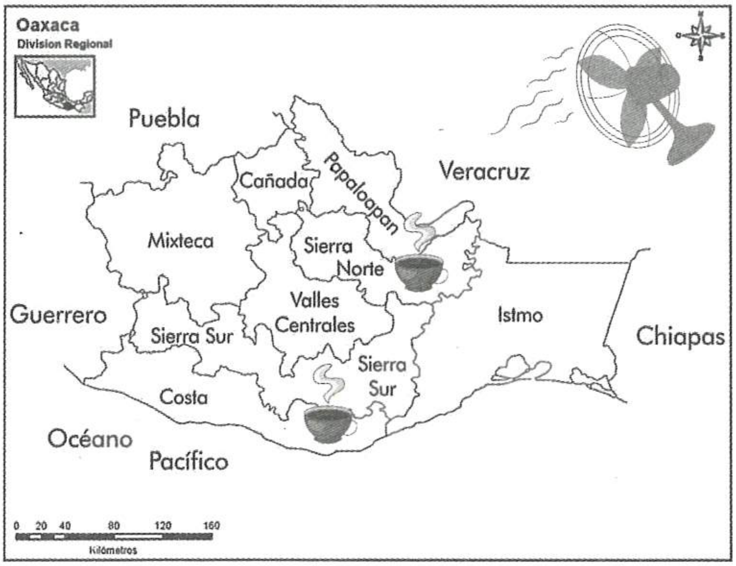
Metas CC	Categorías	Subcategorías
M2 Construye un modelo matemático, identificando las variables de interés, con la finalidad de explicar una situación o fenómeno y/o resolver un problema tanto teórico como de su entorno.	**C2** Solución de problemas y modelación.	**S2** Construcción de modelos.

APERTURA

A tu alrededor encontrarás cambios, por ejemplo, cuando te sirves una taza de atole caliente y lo que sucede al paso de unos minutos, al estar a temperatura del ambiente.

¿Por qué se enfría más rápido el café que contiene tu taza cuando estas en Ixtlán de Juárez de la sierra norte, que cuando estás en Pinotepa Nacional en la región de la costa?

Todo tiene una explicación y este modelo lo estudió Newton con su ley del enfriamiento.



Reto educativo

Reflexiona:

1. ¿La temperatura del ambiente será un factor para el enfriamiento?
2. ¿El enfriamiento de la bebida es constante?
3. ¿Todo el tiempo se mantiene a la misma temperatura?

Podrías realizar este pequeño experimento en casa cuando comes algún caldo o tomas alguna bebida caliente. A partir de la observación y experiencia registra tus resultados.

Definitivamente hay un cambio de temperatura y a esa variación es a la cual denominamos tasa de cambio instantáneo.

DESARROLLO

"La ley del enfriamiento de Newton dice que la razón de cambio de la temperatura de un objeto es proporcional a la diferencia de su temperatura y la temperatura del ambiente".

Analicemos la situación

Si te sirven un café que tiene una temperatura de 75°C en una cafetería en Ixtlán de Juárez en el mes de diciembre, donde la temperatura del ambiente oscila en los 13°C en promedio, tu café va a tener una tasa de cambio de la temperatura con respecto al tiempo, hasta llegar a igualar la temperatura del ambiente.

Mientras que en Pinotepa Nacional, en diciembre la temperatura promedio del ambiente es de 27°C. Al servir tu café se va a enfriar a una razón de cambio con respecto al tiempo, considerando la temperatura del ambiente y la temperatura de tu café.

Esta razón de cambio de la temperatura con respecto al tiempo se modela como:

$$\frac{dT}{dt} = k\left(T - T_A\right)$$

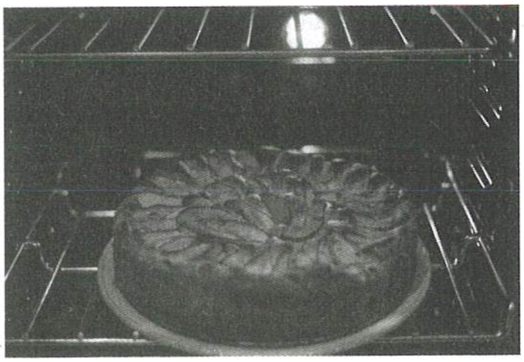
Donde

- k: es una constante.
- T: temperatura del objeto.
- T_A : temperatura del ambiente.

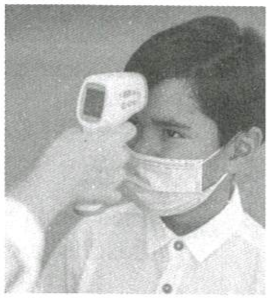
Ejemplos

Observa en los ejemplos la tasa de cambio o también denominada razón de cambio, que representa la primera derivada $f'(x)$, también descrita como $\frac{dT}{dt}$.

1. Se aplica para cuando sacas un panqué del horno que generalmente se precalienta a 180°C, si se deja enfriar durante 15 min, y considerando la temperatura promedio de 28°C, ¿cuál fue la temperatura a la que salió del horno?



2. En estos días de mucho calor en el valle de Oaxaca, hemos registrado hasta 38°C y los autos han resentido también esta temperatura del ambiente, llegando a registrar en promedio 200°C al apagar el motor, se considera que después de 15 min la temperatura del motor ha bajado a 150°C. ¿cuánto tiempo transcurrirá para que el motor disminuya su temperatura hasta los 80°C?



3. En un hospital se mide continuamente la temperatura de los pacientes. La temperatura promedio del ambiente es de 20°C. Para detectar si un paciente tiene fiebre, se considera una medición de 38°C o más, dado que una persona sana registra una temperatura de 36°C. Estas mediciones se utilizan para llevar un registro y control del estado de los pacientes.

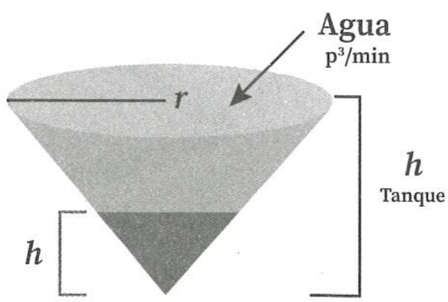
   Este proceso fue muy común en el confinamiento, cuando deseábamos entrar a algún sitio y pasábamos por el termómetro digital.

4. En un tanque cónico se vierte agua en pies cúbicos por minuto, si el tanque no tiene desagüe, ¿qué tan rápido se está elevando el nivel de agua?

   M: cantidad de agua que entra en pies cúbicos.

   Q: cantidad de agua que sale en pies cúbicos.

   V: cantidad de agua alojada en pies cúbicos.



El planteamiento general queda en razón de $V = M - Q$.

Derivando con respecto al tiempo y considerando que no tiene punto de salida de agua.

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dM}{dt} - \frac{dQ}{dt}$$

Tesoro digital

Revisa el QR, te ayudará a visualizar más ejemplos de ¿para qué sirve el cálculo en la vida real?

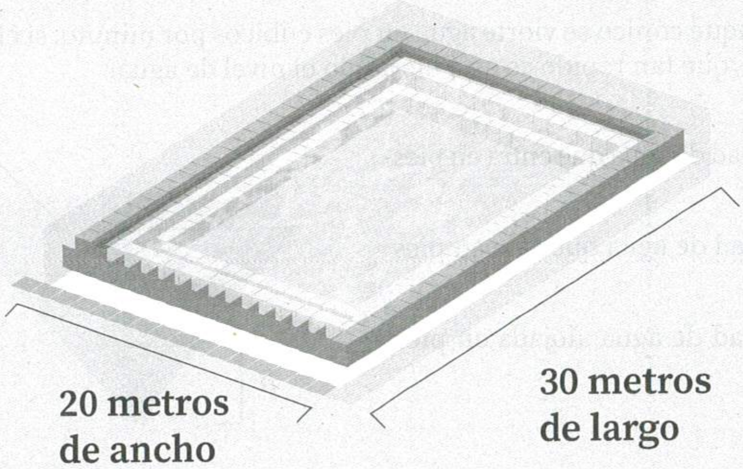
CIERRE

Reto educativo

Instrucciones: en equipos de trabajo o parejas, pueden proponer los planteamientos para los ejercicios.

No se busca que lleguen a la solución final, tan solo a la comprensión de que el cambio es un factor fundamental en su estudio de la derivada y para aplicar el concepto de la derivada como razón de cambio instantánea.

1. Se desea llenar una piscina de 30 metros de largo por 20 metros de ancho y 3 metros de profundidad, la cual se llena a razón de 60 litros/seg.
2. Plantea la razón de cambio del volumen con respecto al tiempo si la piscina no desahoga el agua.



3. Una placa de metal cuadrada incrementa su lado en 0.01 cm por segundo, al ser calentada.
4. ¿Cuál es la razón de cambio del área de la superficie cuadrada de metal?
5. El radio de un círculo está incrementando a una razón de ½ cm/s. Encuentra la razón de cambio del área, cuando el radio es de 5 cm.
6. Un globo esférico está siendo inflado a una razón de 2 cm^3/s, plantea la razón de cambio del volumen con respecto al tiempo cuando el radio es de 1 cm.

PROGRESIÓN 10

Explica y socializa el papel de la derivada

HORAS: 4

...para analizar una función (donde crece/decrece, máximo/mínimos locales, concavidades) y traza su gráfica.

Metas	Categorías	Subcategorías
M3 Comprueba los procedimientos usados en la resolución de problemas utilizando diversos métodos, empleando recursos tecnológicos o la interacción con sus pares.	**C1** Procedural.	**S3** Elementos variacionales.
M4 Argumenta a favor o en contra de afirmaciones acerca de situaciones, fenómenos o problemas propios de la matemática, de las ciencias o de su contexto.	**C2** Procesos de intuición y razonamiento.	**S1** Pensamiento formal.
M2 Socializa con sus conjeturas, descubrimientos o procesos en la solución de un problema tanto teórico como de su entorno.	**C4** Interacción y lenguaje matemático.	**S1** Registro escrito, simbólico, algebraico e iconográfico. **S3** Ambiente matemático de comunicación.

APERTURA

Una de las aplicaciones más comunes del cálculo es la determinación de valores máximos y mínimos, dicho en otras palabras, su fin es resolver problemas donde se calcula el valor máximo o mínimo de la función de una variable.

Por ejemplo: minimizar el error de medición, determinar la utilidad máxima, minimizar la cantidad de material para construir un contenedor, etcétera. Esto es tangible en cómo los ingenieros especialistas deciden el empaque idóneo para un producto de tal manera que su costo sea el mínimo y que, a su vez, provea al producto de la protección adecuada.

Reto educativo

Instrucciones: dibuja una esfera, un cilindro y un prisma rectangular. El volumen de una esfera está en función de su radio. El volumen del cilindro en función de su radio y su altura y el prisma rectangular en función de su largo, ancho y altura.

Reflexiona:

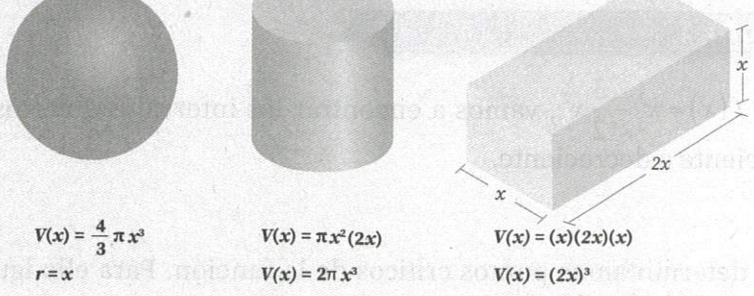
1. ¿La función volumen de cada figura presenta una sola variable?
2. ¿Cuáles sí presentan una sola variable? ¿Cuáles no?

Tesoro digital

Para recordar cómo obtener el volumen puedes ver este video.

Ahora, vamos a graficar la función volumen para las tres figuras, pero todas en función de una sola variable para poder realizar el análisis de forma más simple. Para ello daremos las siguientes dimensiones a las figuras:

Esfera | **Cilindro** | **Prisma rectángular**



Esfera	Cilindro	Prisma rectángular
$V(x) = \frac{4}{3}\pi x^3$	$V(x) = \pi x^2(2x)$	$V(x) = (x)(2x)(x)$
$r = x$	$V(x) = 2\pi x^3$	$V(x) = (2x)^3$
	$r = x$	**Altura:** x
	$h = 2x$	**Largo:** $2x$
		Ancho: x

Para realizar la gráfica puedes apoyarte en una aplicación para graficar, como GeoGebra.

Flash educativo

En perspectiva de su resistencia, la esfera es la más fuerte, después el cilindro y por último el prisma rectangular.

Responde:

1. ¿Cuál figura tiene mayor volumen, si el valor de x está definido entre 0 y 6, $(0 \leq x \leq 6)$?

Lo anterior nos da una breve idea de cómo se utiliza las funciones y su análisis de máximos y mínimos.

DESARROLLO

Para empezar con la solución a la problemática sobre dónde encontrar los máximos y mínimos de la gráfica de una función, empezaremos por determinar en qué intervalos la función es creciente y decreciente.

Función creciente y decreciente

Para determinar si una función es creciente y decreciente en un intervalo utilizaremos el siguiente teorema:

Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y diferenciable en el intervalo abierto (a, b):

Si $f'(x) > 0$ para toda x en (a, b), entonces f es creciente en $[a, b]$;

Si $f'(x) < 0$ para toda x en (a, b), entonces f es decreciente en $[a, b]$.

Ejemplo 1

En la función $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2$, vamos a encontrar los intervalos abiertos en los cuales la función es creciente o decreciente.

Solución

Para empezar, determinamos puntos críticos de la función. Para ello igualamos a cero la primera derivada de la función:

Función:

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2$$

Derivamos:

$$f'(x) = 3x^2 - 3x$$

Igualamos a cero:

$$3x^2 - 3x = 0$$

Resolvemos la ecuación por factorización:

$$3(x)(x-1) = 0$$

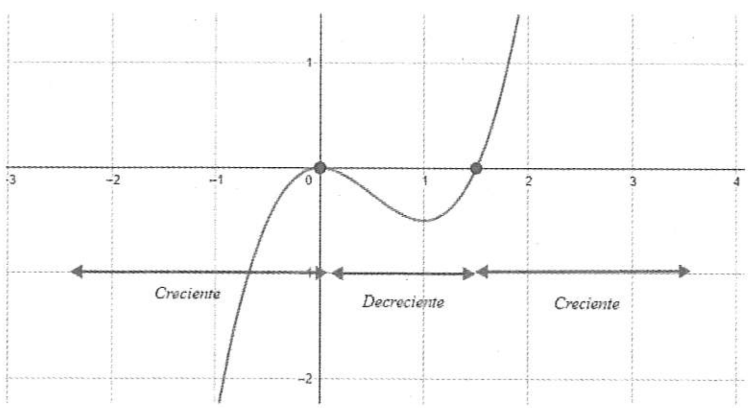
Los puntos críticos son:

$$x = \{0,1\}$$

Hacemos una pequeña tabla para indicar los intervalos que se observan:

Intervalo	$-\infty < x < 0$	$0 < x < 1$	$1 < x < \infty$
Valor de prueba	$x = -1$	$x = \frac{1}{2}$	$x = 2$
Signo de f′(x)	$f'(-1) = 6{,}6 > 0$	$f'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4}, -\frac{3}{4} < 0$	$f'(2) = 6{,}6 > 0$
Conclusión	**Creciente**	**Decreciente**	**Creciente**

De lo anterior podemos concluir que: el intervalo que va de $(-\infty,0)$ es creciente, el intervalo $(0,1)$ es decreciente y el intervalo de $(1,\infty)$ es creciente. Observa la gráfica.



Máximos y mínimos relativos

Saber dónde crecen y decrecen los intervalos nos ayuda a identificar los puntos donde una función deja de crecer o comienza decrecer y viceversa. Estos puntos se conocen como extremos relativos.

- **Un máximo relativo o local** se produce cuando una función deja de crecer y empieza a decrecer; es decir, cuando la derivada cambia de signo positivo a signo negativo.
- **Un mínimo local o relativo** se produce cuando una función deja de decrecer y empieza a crecer; es decir, se produce cuando la derivada cambia de signo negativo a positivo.

Ejemplo 2

Encuentra los máximos o mínimos de $f(x) = x^3 - 6x^2 + 15$.

Solución

Función:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 15$$

Derivamos:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x$$

Igualamos a cero:

$$3x^2 - 12x = 0$$

Factorizamos:

$$3x(x-4) = 0$$

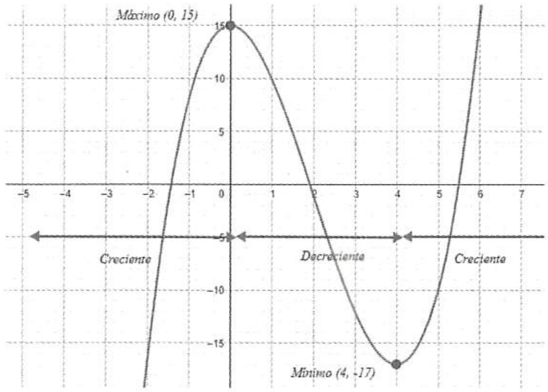
Los puntos críticos son:

$$x = \{0,4\}$$

Hacemos una tabla como en el ejemplo anterior:

Intervalo	$-\infty < x < 0$	$0 < x < 4$	$4 < x < \infty$
Valor de prueba	$x = -1$	$x = 2$	$x = 6$
Signo de f´(x)	$f'(-1) = 15, 15 > 0$	$f'(2) = -12, -12 < 0$	$f'(6) = 36, 36 > 0$
Conclusión	Creciente	Decreciente	Creciente

De lo anterior, se puede concluir que la función tiene un máximo relativo en el punto $(0,15)$ y un mínimo relativo en el punto $(4,-17)$. Tal como se observa en la gráfica.



Concavidad

Para determinar los intervalos en los que la gráfica de una función es cóncava hacia arriba o hacia abajo se usa la segunda derivada.

> Sea f una función cuya segunda derivada existe sobre un intervalo.
> Si $f''(x) > 0$ para todo x, entonces la gráfica de la función es cóncava hacia arriba.
> Si $f''(x) < 0$ para todo x, entonces la gráfica de la función es cóncava hacia abajo.

Ejemplo 3

Determina los intervalos sobre los que la gráfica de $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 2$ es cóncava hacia arriba o hacia abajo.

Solución

Para empezar, derivamos la función hasta encontrar la segunda derivada.

Función:

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 - 2$$

Derivamos:

$$f'(x) = 3(-x^{3-1}) + 2(3x^{2-1}) - 0$$

Obtenemos la primera derivada:

$$f'(x) = -3x^2 + 6x$$

Volvemos a derivar:

$$f''(x) = 2\left(-3x^{2-1}\right) + 6$$

La segunda derivada es:

$$f''(x) = -6x + 6$$

Ya que obtuvimos la segunda derivada, igualamos a cero y resolvemos.

$$f''(x) = -6x + 6$$

$$-6x + 6 = 0$$

$$-6x = -6$$

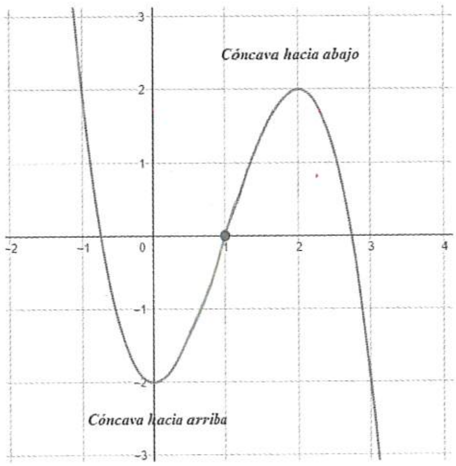
De donde:

$$x = 1$$

Entonces se debe hacer la prueba en los siguientes intervalos: $(-\infty,1)$ y $(1,\infty)$.

Intervalo	$-\infty < x < 1$	$1 < x < \infty$
Valor de prueba	$x = -2$	$x = 2$
Signo de f´(x)	$f''(-2) = -6(-2) + 6$ $f''(-2) = 12 + 6 = 18$ $18 > 0$	$f''(1) = -6(2) + 6$ $f''(1) = -12 + 6$ $-12 < 0$
Conclusión	Cóncava hacia arriba	Cóncava hacia abajo

La gráfica de la función es:



Puntos de inflexión

Para determinar los puntos de inflexión se utiliza el siguiente teorema:

Si $(c, f(c))$ es un punto de inflexión de la gráfica de *f*, entonces $f''(c) = 0$ o bien *f*" no está definida en $x = c$.

En el ejemplo anterior se observa que cuando igualamos la segunda derivada a cero, la solución dio como resultado que $x = 1$, entonces el punto $(1,0)$ es un punto de inflexión.

CIERRE

Reúnete en equipos de trabajo para darle solución a los siguientes ejercicios.

Reto educativo

1. Determina los intervalos sobre los cuales la gráfica es creciente o decreciente, los máximos y mínimos, cóncava hacia arriba o hacia abajo y los puntos de inflexión.

   a. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x$

   b. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$

   c. $f(x) = 2x^4 - 8x + 3$

   d. $f(x) = x^3(x-4)$

   e. $f(x) = x(x-4)^3$

PROGRESIÓN 11

Resuelve problemas de su entorno o de otras áreas del conocimiento

HORAS: 4

...empleando funciones y aplicando la derivada (e.g. problemas de optimización) organiza su procedimiento y lo somete a debate.

Metas	Categorías	Subcategorías
M4 Argumenta a favor o en contra de afirmaciones acerca de situaciones, fenómenos o problemas propios de la matemática, de las ciencias o de su contexto.	**C2** Procesos de intuición y razonamiento.	**S1** Capacidad para observar y conjeturar. **S2** Pensamiento intuitivo. **S3** Pensamiento formal.
M4 Construye y plantea posibles soluciones a problemas de Áreas de conocimiento, Recursos sociocognitivos, Recursos socioemocionales y de su entorno, empleando técnicas y lenguaje matemático.	**C3** Solución de problemas y modelación.	**S2** Construcción de modelos. **S3** Estrategias heurísticas y ejecución de procedimientos no rutinarios.
M2 Socializa con sus conjeturas, descubrimientos o procesos en la solución de un problema tanto teórico como de su entorno.	**C4** Interacción y lenguaje matemático.	**S3** Ambiente matemático de comunicación.

APERTURA

¿Qué es la optimización en matemáticas?

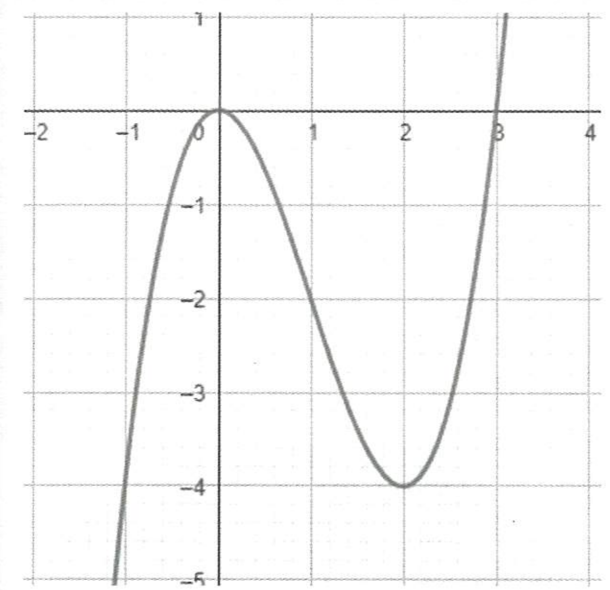
Es buscar la mejor solución de la forma más eficiente utilizando la menor cantidad de recursos que se tienen a disposición. Dicho de otra forma, la optimización incluye hallar los "mejores valores" de una función. Para optimizar una función se deben hallar los valores máximos y mínimos, lo cual indica que se deben encontrar los valores en el dominio de una función para los cuales se alcanza el máximo o mínimo del codominio.

Así que para optimizar los recursos siempre es preferible encontrar el punto más alto de la gráfica de una función o el más bajo.

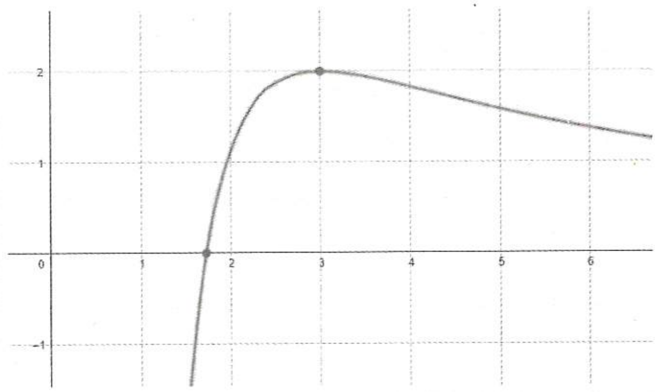
Reto educativo

Observa las siguientes gráficas e indica los puntos máximos y mínimos:

1.

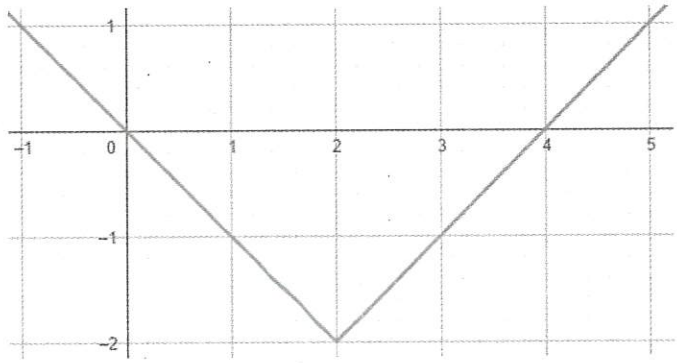


a. En la gráfica ¿qué se observa: un máximo, un mínimo o ambos?
b. ¿Qué coordenadas tiene el punto máximo?
c. ¿Qué coordenadas tiene el punto mínimo?



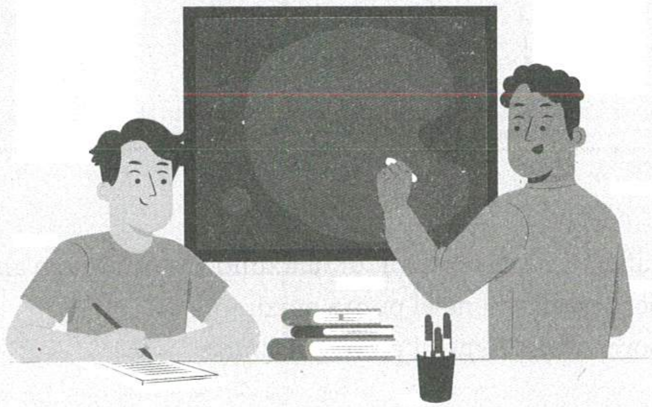
a. En la gráfica, ¿qué se observa: un máximo, un mínimo o ambos?

b. ¿Qué coordenadas tiene?



a. En la gráfica, ¿qué se observa: un máximo, un mínimo o ambos?

b. ¿Qué coordenadas tiene?



DESARROLLO

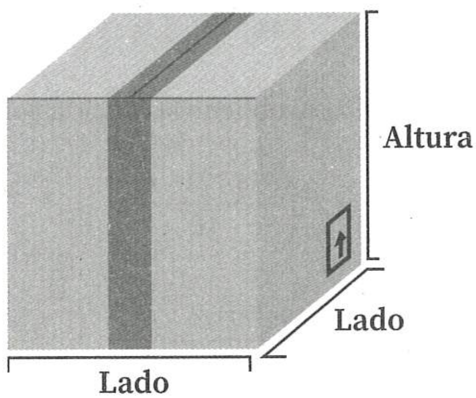
Problemas de aplicación de mínimos y máximos

Una de las aplicaciones más comunes del Cálculo es determinar los valores máximos y mínimos. Por eso resolveremos algunos ejemplos de estos.

Ejemplo 1

Un fabricante de cajas de cartón va a realizar el diseño de una caja que le pide un cliente. Las especificaciones que le dio su cliente son: sin tapa, de base cuadrada y un área superficial de 696.773 cm^2. ¿Qué dimensiones deberá tener la caja para tener un volumen máximo?

Solución



Como la caja tiene una base cuadrada, el volumen es:

$$Volumen = \text{Área de la base} \times Altura$$

$$Volumen = Lado \times Lado \times Altura$$

Como no conocemos las dimensiones de la caja, utilizaremos variables para indicar la medida de los lados y la altura. En este caso $L = Lado$ y $A = Altura$. Así la ecuación nos quedaría como:

Ecuación 1

$$V = L^2 A$$

Ahora utilizaremos el área superficial de la caja para obtener una segunda ecuación:

$$\text{Área superficial} = \text{Área de la base} + \text{Área de los cuatro lados}$$

$$\text{Área superficial} = (Lado \times Lado) + 4(Lado \times Altura)$$

También para esta ecuación utilizaremos las mismas variables que la ecuación anterior y agregamos el dato del Área superficial que dio el cliente, *Área superficial = 696.773 cm²*.

Ecuación 2

$$\acute{A}rea\,superficial = (Lado \times Lado) + 4(Lado \times Altura)$$

Como se debe maximizar el volumen de la caja, se debe expresar este como una función de una sola variable. Para ello, tomaremos la ecuación 2 y despejaremos A. El volumen de la caja está en función de la medida de los lados:

$$696.773 = L^2 + 4LA$$

$$696.773 - L^2 = 4LA$$

$$\frac{696.773 - L^2}{4L} = A$$

Si se sustituye A en la *Ecuación 1*, se obtiene la función volumen respecto a L:

$$V = L^2\left(\frac{696.773 - L^2}{4L}\right)$$

$$V = \frac{696.773L^2 - L^4}{4L}$$

$$V = \frac{696.773L^2}{4L} - \frac{L^4}{4L}$$

$$V = 174.193L - \frac{L^3}{4}$$

Es importante destacar que la ecuación anterior representa una función de una sola variable. Ahora hay que indicar cuál será el dominio de esta función. Para ello tomamos los siguientes criterios:

c. El valor menor: dado que el volumen no puede tener valores negativos, el valor menor del dominio será cero. A partir de ahí, el volumen va creciendo hasta alcanzar el valor mayor del dominio.
d. El valor mayor del dominio: este valor lo está determinando el área superficial de la caja, el cual debe ser de *696.773 cm²*. Dado que el área de la base de la caja es $A = L^2$, el valor mayor del dominio será $\sqrt{696.773} \approx 26.396\,cm^2$.

Para maximizar la función volumen utilizaremos el criterio de la primera derivada, para hallar los valores críticos de la función:

$$\frac{dv}{dc}=\frac{d}{dL}\left(174.193L-\frac{L^3}{4}\right)$$

$$\frac{dv}{dL}=174.193-\frac{3}{4}L^2$$

$$174.193-\frac{3}{4}L^2=0$$

$$-\frac{3}{4}L^2=-174.193$$

$$L^2=\frac{-174.193}{-\frac{3}{4}}$$

$$L^2=232.257$$

$$L\approx\pm 15.24\,cm$$

Entonces los puntos críticos son $x=-15.24$ y $x=15.24$, pero no consideramos el valor negativo porque está fuera del dominio de la función.

Ahora, evaluamos la función volumen para encontrar el volumen máximo. Y sustituimos el valor de x en la fórmula de la altura para poder hallarla:

$$V=174.193L-\frac{L^3}{4}$$

Sustituimos $L=15.25$ en la función:

$$V=174.193(15.24)-\frac{(15.24)^3}{4}$$

$$V=1769.8\,cm^3$$

Este es el volumen máximo que se puede obtener con la caja y la altura de la caja es:

$$A=\frac{696.773-L^2}{4L}$$

Sustituyendo $L = 15.25$ en esta otra ecuación, tenemos:

$$A=\frac{696.773-(15.24)^2}{4(15.24)}$$

$$A=7.62\text{ cm}$$

Las medidas de la caja serán:

15.24 cm × 15.24 cm × 7.62 cm

Tesoro digital

Revisa el siguiente enlace del QR, donde podrás observar más ejemplos:

"Obtener el Volumen Máximo de la caja (Máximos y mínimos, aplicación de las derivadas)".

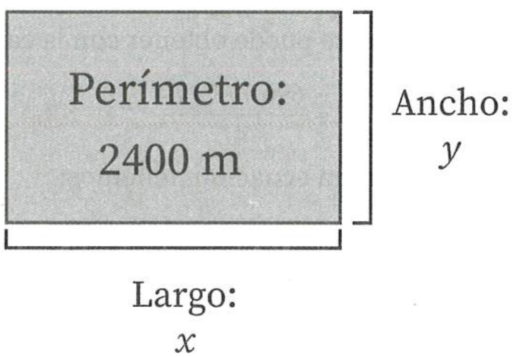
Reto educativo 1

Instrucciones: en equipos resuelvan los siguientes problemas de optimización. Acudan con su docente a resolver sus dudas y comparen sus resultados con los de otros equipos.

1. En una fábrica de cajas de cartón, un cliente hizo la siguiente petición: que elaboren una caja con base cuadrada y un área superficial de $4556\,cm^2$. ¿Qué dimensiones debe tener la caja con el volumen máximo?
2. En la misma fábrica, otro cliente pide que se elabore una caja de cartón con base rectangular. El largo debe ser 10 cm más que el ancho, la altura de la caja de 5 cm y debe tener un área superficial de $1975\,cm^2$. ¿Qué dimensiones debe tener la caja con el volumen máximo?

Ejemplo 2

Un granjero tiene 2400 m de material para cercar un terreno rectangular, ¿cuáles deben ser las dimensiones del terreno para que el área sea máxima?



Solución

Se plantea una ecuación para el área, como el terreno es rectangular la ecuación será:

$$\acute{A}rea\,del\,terreno = (largo \times Ancho)$$

Ecuación 1

$$A = xy$$

También se plantea una ecuación con el siguiente perímetro, nos queda:

$$Perimetro = La\,suma\,de\,todos\,los\,lados$$

$$P = x + y + x + y$$

$$P = 2x + 2y$$

Ecuación 2

$$P = 2(x + y)$$

De la *ecuación 2*, despejamos la variable *y*, nos queda:

$$\frac{P}{2} = x + y$$

$$y = \frac{P}{2} - x$$

Como el perímetro del terreno está delimitado por la cantidad de cerca que tiene el granjero, este será de 2400 m.

$$y = \frac{2400}{2} - x$$

$$y = 1200 - x$$

Ahora sustituimos el valor de la variable *y* en la *ecuación 1*, de esta manera tendremos una ecuación que va a representar el área del terreno y con una sola variable.

$$A = x(1200 - x)$$

$$A = 1200x - x^2$$

Antes de hallar qué valor de x da un valor máximo del área, se determina el dominio factible. Entonces, el área tendrá un dominio de *0* a *1200*. ¿Por qué *1200?* Porque el perímetro de este terreno es dos veces la suma del largo y el ancho, lo cual da un total de *2400* m. Por lo tanto, solo podemos ocupar la mitad de la longitud de la cerca para que se pueda utilizar toda.

$$Dom = 0 \leq x \leq 1200$$

Para maximizar el área, hallamos los puntos críticos de la función área:

$$\frac{dA}{dx} = \frac{d}{dx}\left(1200x - x^2\right)$$

$$\frac{dA}{dx} = 1200 - 2x$$

Ya que derivamos la función área, igualamos a cero y resolvemos para *x:*

$$1200 - 2x = 0$$

$$-2x = -1200$$

$$x = \frac{-1200}{-2}$$

$$x = 600$$

Ya que hallamos el punto crítico, sustituimos el valor hallado en la ecuación del área para saber cuál es el valor máximo:

$$A = 1200x - x^2$$

$$A = 1200(600) - (600)^2$$

$$A_{max} = 360000m^2$$

Por último, nos falta determinar el valor del ancho del terreno:

$$y = 1200 - x$$

Dado que $x = 600$:

$$y = 1200 - 600$$

$$y = 600$$

Las dimensiones del terreno serán de Largo = 600 m y de ancho 600 m.

Tesoro digital

"Dimensiones de un rectángulo de área máxima"

Revisa el siguiente link del QR donde podrás observar más ejemplos:

Reto educativo 2

Instrucciones: en equipos, resuelve los siguientes problemas de optimización, acude con tu docente a resolver tus dudas y compara lo que obtuviste con otros equipos.

1. Un granjero dispone de 4000 m de material para cercar un terreno rectangular contiguo a un río de curso rectilíneo. No se requiere cercar en la orilla del río. ¿Cuáles deben ser las dimensiones del terreno para que su área sea máxima?
2. Un ranchero tiene 200 m de cerca para encerrar dos corrales rectangulares. ¿Qué dimensiones deben usarse de modo que el área encerrada sea máxima?

CIERRE

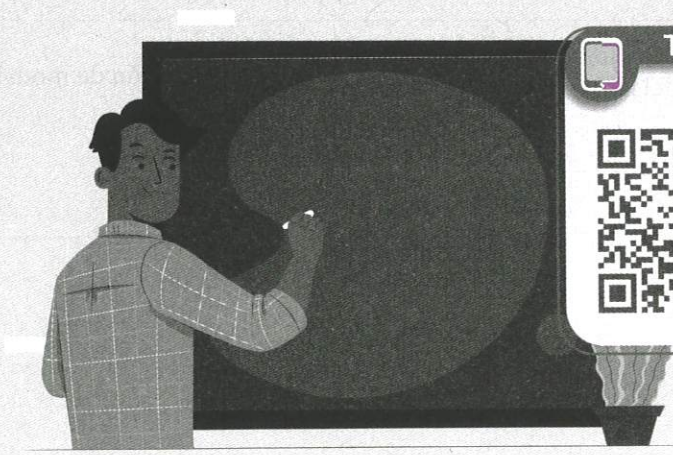
Ahora es turno de que resuelvas, en tu libreta y de manera individual, un problema clásico de la optimización. Si tienes dudas, revisa los ejercicios anteriores y acude con tu docente. No olvides que lo importante es plantear una función con una sola variable para que puedas aplicar en ella el criterio de la primera derivada.

Reto educativo

Trabajo independiente

Problema

Se desea construir una caja abierta y de base cuadrada a partir de una lámina de 40 cm de ancho y 60 cm de largo, cortando un cuadrado en cada esquina y doblando los bordes hacia arriba. Determina las dimensiones de la caja para que su volumen sea máximo.



Tesoro digital

"Optimización | volumen de una caja sin tapa"

Revisa el siguiente enlace del QR donde podrás observar más ejemplos:

PROGRESIÓN 12

Examina la gráfica

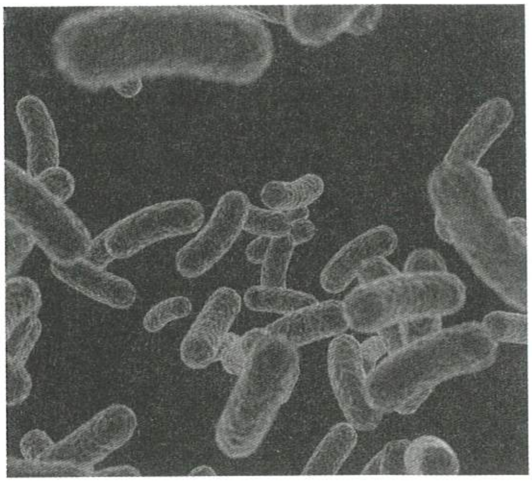
HORAS: 5

...de funciones logarítmicas con diferentes bases y las gráficas de las funciones exponenciales para describirlas y realizar afirmaciones sobre el significado de que la función exponencial y logarítmicas de base "a" sean inversas entre sí.

Metas	Categorías	Subcategorías
M3 Compara hechos, opiniones o afirmaciones para organizarlos en formas lógicas útiles en la solución de problemas y explicación de situaciones y fenómenos.	**C2** Procesos de intuición y razonamiento.	**S1** Capacidad para observar y conjeturar. **S2** Pensamiento intuitivo. **S3** Pensamiento formal.
M2 Construye un modelo matemático, identificando las variables de interés, con la finalidad de explicar una situación o fenómeno y/o resolver un problema tanto teórico como de su entorno.	**C3** Solución de problemas y modelación.	**S2** Construcción de modelos.

APERTURA

Las bacterias son organismos procariotas unicelulares que se encuentran en casi todas las partes de la Tierra. Son vitales para los ecosistemas del planeta. Algunas especies pueden vivir en condiciones realmente extremas de temperatura y presión. El cuerpo humano está lleno de bacterias: de hecho, se estima que contiene más bacterias que células humanas. La mayoría de las bacterias que se encuentran en el organismo no producen ningún daño, al contrario, algunas son beneficiosas. Una cantidad relativamente pequeña de especies son las que causan enfermedades.



Las bacterias son microorganismos que pueden tener distintas formas. Pueden ser esféricas, alargadas o espirales. Existen bacterias perjudiciales, llamadas patogénicas, las cuales causan enfermedades; pero también hay bacterias buenas. Por ejemplo, en nuestro sistema digestivo, en el intestino, tenemos bacterias que son muy necesarias para que nuestro cuerpo funcione correctamente. Lo más sorprendente sobre las bacterias es que en nuestro cuerpo tenemos 10 veces más células bacterianas que células humanas. Las bacterias también son muy importantes para la biotecnología. (Bosh Giral, Guerra Tejada, Hernández Gardíadiego & De Oteyza, 2004)

Estos organismos unicelulares que adoptan diversas formas se reproducen por fisión el cuál es un proceso mediante el que la célula duplica su material genético, se alarga y se divide en dos nuevas células idénticas a la original. Si se encuentran con condiciones favorables, esta división se realiza cada cierto tiempo y puede dar origen a miles de millones de bacterias en cuestión de horas. Este crecimiento poblacional, puede describirse mediante un modelo exponencial.

Reto educativo

Instrucciones: para probar los efectos de un antibiótico en una bacteria, un químico cultiva una cepa con el fin de determinar la rapidez de reproducción. La población inicial es de 200 bacterias y cada hora se duplica la cantidad existente.

a. ¿Cuántas bacterias habrá al cabo de 6 horas?

b. Escribe un modelo exponencial que describa el crecimiento de la colonia.

1. Para encontrar la cantidad que habrá al cabo de 6 horas elaboraremos una tabla. Completa los datos que faltan.

Hora	Población	Modelo
0	600	
	2×600	$600(2)^1$
2		$600(2)^2$
3	$2 \times 2 \times 2 \times 600$	$600(2)^3$
4		
5		
6		

2. Analizando los resultados de la última columna, ¿cuál es el modelo exponencial que describe el crecimiento de las bacterias?

Tesoro digital

En el siguiente video se muestra lo que es una función exponencial:

DESARROLLO

Función exponencial

Vamos a tomar un número entero positivo cualquiera y lo vamos a llamar b, podemos hallar sus potencias, por ejemplo:

$2^0 = 1$ $\quad$ $2^{\sqrt{3}} = 3.3219\ldots$ $\quad$ $2^2 = 4$

$2^{\frac{1}{2}} = 1.4142\ldots$ $\quad$ $2^{-2} = 0.25$

De lo anterior, tenemos como modelo matemático: 2^x. En este caso, la variable es el exponente, por lo que a este tipo de funciones se les llama *función exponencial.*

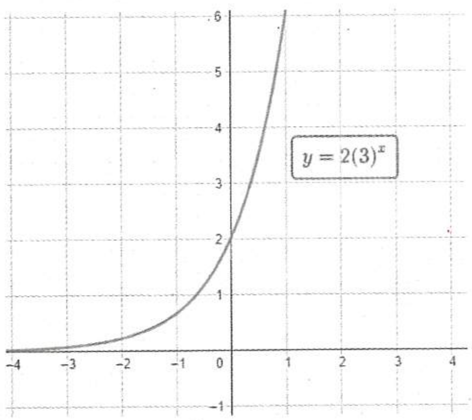
La ecuación de una *función exponencial* con base b tiene la forma:

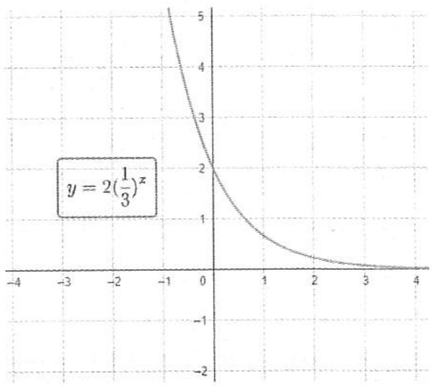
$$y = Ab^x$$

Donde x puede ser cualquier valor real, b es un número positivo y distinto de 1 y el valor inicial $A > 0$.

La gráfica de una función exponencial puede ser creciente o decreciente, según sea *mayor o menor que 1* el valor de b.

Gráfica de un crecimiento exponencial	Gráfica de un decaimiento exponencial
Donde: $b > 1$	Donde $0 < b < 1$





Las gráficas de funciones exponenciales son continuas, cortan al *eje y* en $P(0, A)$ y tienen por *asíntota al eje x*, es decir, se aproximan a dicho eje, pero nunca lo tocan.

Tesoro digital

En el siguiente video se explica cómo calcular la asíntota de una función exponencial:

Reto educativo 1

Instrucciones: realiza las gráficas de las siguientes funciones exponenciales en tu libreta. Te sugerimos utilizar Geogebra. Indica en cada gráfica si es un crecimiento o un decaimiento exponencial, en qué punto la gráfica corta al *eje y* y en dónde se encuentra la asíntota.

1. $y=\frac{1}{2}(4)^x$
2. $y=2(2)^x+1$
3. $y=-3\left(\frac{1}{2}\right)^x$
4. $y=\left(\frac{2}{3}\right)^x+2$
5. $y=3\left(\frac{1}{4}\right)^x-2$

Modelo exponencial

Una situación puede modelarse mediante una función exponencial cuando en ella, a intervalos iguales:

a. Se observa un incremento o decrecimiento por un valor constante.

b. Al dividir dos valores consecutivos es siempre igual a una cantidad constante.

Reto educativo 2

Instrucciones: resuelve en tu cuaderno con la ayuda de un compañero de clases los siguientes problemas. En caso de duda, acude con tu docente.

1. En una población de 5 000 habitantes se esparce un rumor, cada hora la cantidad que se entera del mismo es el doble ¿cuántas personas se enterarán del rumor después de 12 horas de iniciado?
2. ¿Cuál será el monto en cuatro años de $1 500 pesos depositados en una cuenta bancaria, que otorga 23% de interés anual?
3. En enero del 2022 adquiriste un automóvil en $285 000. Si cada año su valor disminuye en un 8%, ¿cuánto valdrá tu auto en el año 2030? Y si alguien en ese año te ofrece $150 000, ¿lo venderías?

Tesoro digital

En el siguiente video se explica la solución de problemas usando funciones exponenciales:

El número e

Aunque podemos utilizar cualquier número como base en una función exponencial, existe un número conocido como e. El número e aparece en fenómenos de todo tipo.

El número $e = 2.71828\ldots$ es el límite de la sucesión de valores de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ cuando n crece indefinidamente.

Los casos más comunes en que se utiliza el número e es en la fórmula del interés compuesto, ya que al aumentar la frecuencia n del número de capitalizaciones de interés, el valor de crecimiento se acerca al número e.

Interés compuesto n veces al año:

$$y = A\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$$

En el interés compuesto n veces, los intereses se abonan en n periodos (año, trimestre, cuatrimestre, semestre, etc.).

Interés compuesto continuo:

$$y = Ae^{rt}$$

En el interés compuesto continuo los intereses se abonan de manera instantánea.

Función exponencial natural

La función exponencial con base e:

$$y = Ae^{ax}$$

Se denomina *función exponencial natural* si $a > 0$ es crecimiento exponencial y si $a < 0$ es un decaimiento exponencial.

Tesoro digital

En el siguiente video puedes saber más sobre el número e:

En este otro video se explica el uso del número e para el cálculo:

Ahora veremos algunas aplicaciones de la función exponencial natural.

Ejemplo 1

Depositas \$8000 en una cuenta bancaria que te produce interés compuesto de 11% anual. Calcula el saldo de tu cuenta al cabo de cinco años, con intereses capitalizados:

- **a.** Semestral.
- **b.** Mensual.
- **c.** Continua.

Solución

a. Sabemos que:

$A = 8000$ $\quad r = 11 = 0.11$

$n = 2$ $\quad t = 5$

Sustituyendo, obtenemos:

$$y = 8000\left(1 + \frac{0.11}{2}\right)^{2(5)} = 13665.15$$

b. Para este caso sabemos que $n = 12$, y todos los demás datos son los mismos, así que, sustituyendo, obtenemos:

$$y = 8000\left(1 + \frac{1}{12}\right)^{12(5)} = 13831.32$$

c. Y para la capitalización continua, usamos la *función exponencial natural.* Donde $A = 8000$, $r = 0.11$ y $t = 5$.

$$y = 8000e^{0.11(5)} = 13866.02$$

Reto educativo 3

Instrucciones: con la ayuda de un compañero de clases resuelve en tu cuaderno los siguientes problemas. En caso de duda, acude con tu docente.

1. Obtén el monto en 3 años de \$4800 con un 7% de interés compuesto anual, capitalizable:
   - **a.** Bimestralmente.
   - **b.** Diario.
   - **c.** Continuo.

2. Utilizando la formula $y = 2e^{-0.0001216t}$ para calcular la cantidad de carbono 14 que subsiste en un fósil responde: ¿cuál es la cantidad inicial de C_{14} si el fósil tiene 100 000 años?

3. La ecuación $y = Ae^{-0.000427t}$ permite hallar la porción de Radio 226 (R_{226}) que subsiste de una cantidad inicial A al cabo de t años. Si $A = 24\text{g}$, ¿Cuántos g de R_{226} quedan en 60 años?

Función logarítmica

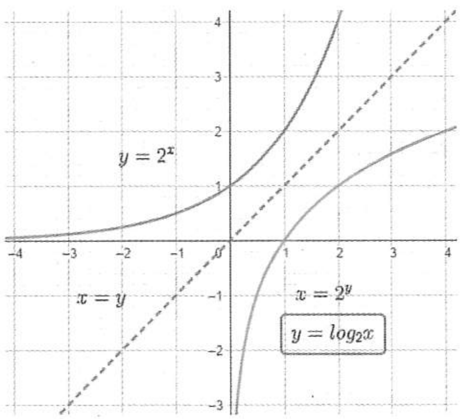
Si tenemos $4^2 = 8$, se observa en la operación que el exponente es 2, la base es 4 y el número dado es 8. Esto lo podemos interpretar de la siguiente manera: 2 es el logaritmo en base 4 del número 8, o dicho de otro modo $2 = \log_4 8$.

El logaritmo de un numero será:

Si $a = b^y$, entonces y será el logaritmo en base b del número a, es decir $y = \log_b a$.

De lo anterior si cambiamos el número a por la variable x, tendremos la función $y = \log_b x$, la cual llamaremos *función logarítmica*. Tomando en cuenta que x acepta valores reales positivos y b es un número positivo distinto de 1.

Cabe mencionar que la *función logarítmica* ($x = b^y$) es la *inversa* de la *función exponencial* ($y = b^x$). Si graficamos ambas en el mismo plano cartesiano observamos que la gráfica logarítmica es el reflejo de la gráfica exponencial sobre la recta $x = y$.



Logaritmos comunes y naturales

En la práctica existen dos tipos de logaritmos muy utilizados: los logaritmos comunes cuya base es 10 y los naturales con base e.

- *Logaritmo común:* $\log x = \log_{10} x$
- *Logaritmo natural:* $\ln x = \log_e x$

Propiedades

a. El logaritmo del número 1 es cero.

$$\log_2 1 = 0 \rightarrow 2^0 = 1$$

b. El logaritmo de la base elevada a un exponente es el exponente.

$$\log_4 4^x = x \rightarrow 4^x = 4^x$$

c. El logaritmo de la base 1.

$$\log_3 3 = 1 \rightarrow 3^1 = 3$$

d. Del producto:

$$\log_b uv = \log_b u + \log_b v$$

e. Cociente:

$$\log_b \frac{u}{v} = \log_b u - \log_b v$$

f. Potencia:

$$\log_b u^v = v \log_b u$$

Ejemplo 2

Desarrolla las siguientes expresiones logarítmicas

a. $\log \frac{mn}{o}$ **b.** $\log_5 \frac{x^3\sqrt{y}}{\sqrt[3]{w}}$ **c.** $\log x^4 y^3$

Solución

a.

$$\log \frac{mn}{o} = \log mn - \log o = \log m + \log n - \log o$$

b.

$$\log_5 \frac{x^3\sqrt{y}}{\sqrt[3]{w}} = \log_5 x^3\sqrt{y} - \log_5 \sqrt[3]{w} = \log_5 x^3 + \log_5 \sqrt{y} - \log_5 \sqrt[3]{w}$$

$$\log_5 \frac{x^3\sqrt{y}}{\sqrt[3]{w}} = 3\log_5 x + \frac{1}{2}\log_5 y - \frac{1}{3}\log_5 w$$

c.

$$\log x^4 y^3 = \log x^4 + \log y^3 = 4\log x + 3\log y$$

Flash educativo

La fórmula para el cambio de base es:

$$\log_{10} x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

Solución de ecuaciones logarítmicas y exponenciales

Ejemplo 3

$\log_3 x = 2.5$

Solución

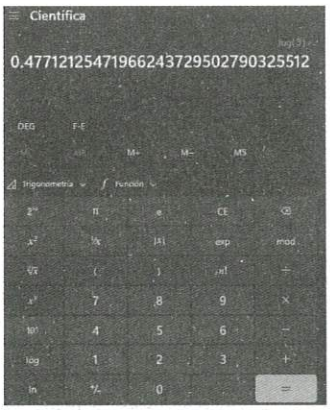
En este problema la base es 3 y su exponente 2.5; por consiguiente, $x = 3^{2.5}$, para evaluar $3^{2.5}$ usando logaritmos debemos encontrar el logaritmo con base 10 de $3^{2.5}$ y después su antilogaritmo, lo que es el resultado de la operación $3^{2.5}$.

$$x = 3^{2.5}$$

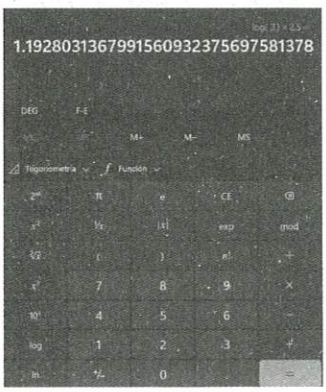
$$\log x = \log 3^{2.5}$$

$$\log 3^{2.5} = 2.5 \log 3$$

$$\log 3^{2.5} = 2.5(\log 3)$$

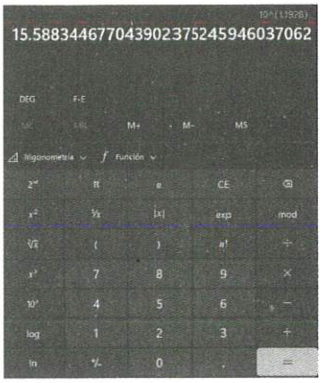


$$\log 3^{2.5} = 2.5\left(0.4771\right), \text{ luego}$$



$$\log x = 1.1928$$

De donde $antilog 1.1928 = 15.588$



Ejemplo 4

$\log_7 x = 1.6$

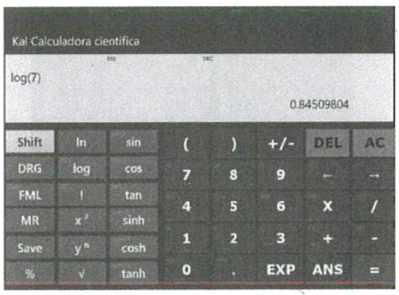
Solución

$$x = 7^{1.6}$$

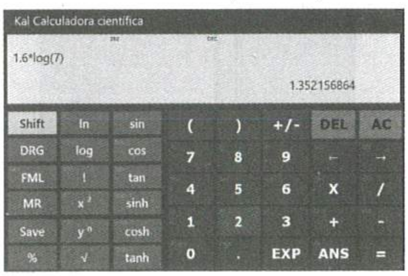
Evaluamos la expresión $7^{1.6}$ por logaritmos:

$$\log x = \log 7^{1.6}$$

$$\log 7^{1.6} = 1.6 \log 7$$

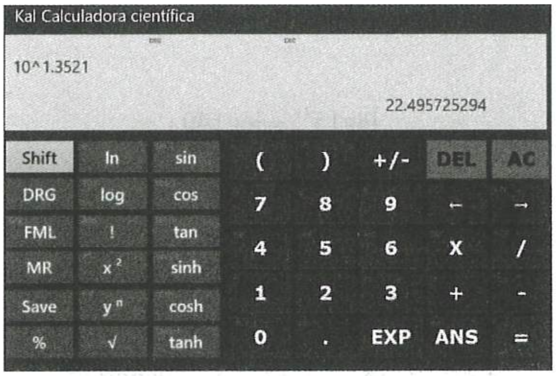


$$\log 7^{1.6} = 1.6(0.8450)$$



$$\log 7^{1.6} = 1.3521$$

De donde $antilog\, 1.35210 = 22.49$



Por consiguiente, la solución es $x = 22.49 \approx 22.5$.

Ejemplo 5

$2^x = 8$

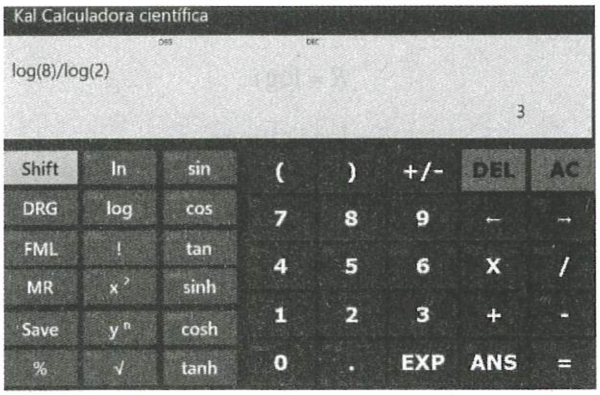
Solución

Si $2^x = 8$, entonces

$\log 2^x = \log 8$, de donde

$x \log 2 = \log 8$; al despejar la x resulta:

$$x = \frac{\log 8}{\log 2}$$



$$x = 3$$

Ejemplo 6

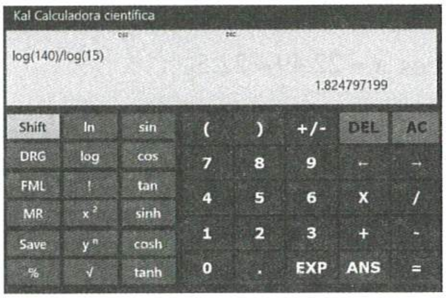
$15^{2x} = 140$

Solución

$$\log 15^{2x} = \log 140$$

$$2x \log 15 = \log 140$$

$$2x = \frac{\log 140}{\log 15}$$



$$2x = 1.8247$$

$$x = 0.9124$$

Ejemplo 7

¿Cuántas veces es más intenso un sismo de magnitud 3 en la escala de Richter, con respecto al movimiento sísmico más pequeño que se puede registrar?

Solución

$$R = \log i$$

$$3 = \log i \text{, luego}$$

$$\log i = 3$$

$$\log i = 3$$

$$i = 1000$$

Un terremoto de magnitud 3 en la escala de Richter es 1 000 veces más intenso que el terremoto más pequeño que se puede registrar.

Tesoro digital

En este video puedes aprender más sobre la ecuación de Richter:

CIERRE

Reto educativo

Instrucciones: resuelve los siguientes problemas.

1. $\log_9 x = \frac{1}{2}$
2. $\log x + \log 5 = 2$
3. ¿Cuánto dinero se tiene que invertir a una tasa de interés anual de 12% compuesto continuamente, para que al final de 4 años el monto sea de $1 300 000?
4. ¿Cuántas veces es más intenso un sismo de 2.25, en la escala de Richter, que el sismo de nivel mínimo registrable?
5. Calcular el pH del vinagre si su $[H^+]$ es 2.9×10^{-3}.

PROGRESIÓN 13

Analiza y describe un fenómeno

HORAS: 5

...en el que la periodicidad sea un constituyente fundamental a través del estudio de propiedades básicas funciones trigonométricas.

Metas	Categorías, conceptos transversales	Subcategorías, conceptos cientificos asociados
M2: Desarrolla la percepción y la intuición para generar conjeturas ante situaciones que requieren explicación o interpretación.	**C2:** Procesos de intuición y razonamiento.	**S1** Capacidad para observar y conjeturar. **S2** Pensamiento intuitivo.
M 2: Construye un modelo matemático, identificando las variables de interés, con la finalidad de explicar una situación o fenómeno y/o resolver un problema tanto teórico como de su entorno.	**C3:** Solución de problemas y modelación.	**S2** Construcción de modelos.

APERTURA

Las funciones trigonométricas son funciones muy utilizadas en las ciencias naturales para analizar fenómenos periódicos, es decir, aquellos cambios que se repiten sucesivamente, siempre de idéntica forma, como ciclos biológicos, movimiento periódico de los planetas, movimiento ondulatorio, oscilación de péndulos, etcétera. De hecho, constituyen la base para la comprensión y el estudio de todos los fenómenos periódicos que se dan en la naturaleza. Un fenómeno periódico puede representarse a través de alguna función periódica como las funciones seno, coseno o tangente.

Ejemplo 1

Un reloj de pared tiene tres manecillas: una para el segundero, otra para el minutero y la última, para las horas. Las longitudes de ellas son: 7, 4.5 y 8.5 cm, respectivamente.

Reto educativo

Instrucciones: reflexiona y contesta.

1. ¿Cuánto tarda el segundero en dar una vuelta completa?

   ____

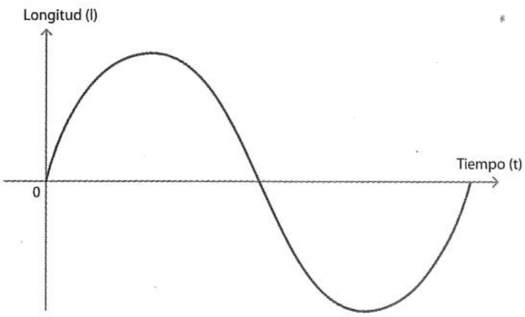
2. ¿Cuánto tarda el minutero en dar una vuelta completa?

   ____

3. ¿Cuánto tarda la manecilla de las horas en dar una vuelta?

   ____

Este fenómeno periódico se puede representar con una onda senoidal.



Reto educativo

Instrucciones: reflexiona y contesta.

1. ¿Cuál es el periodo para la onda del segundero o cuántos segundos le lleva completar una oscilación?

____

2. ¿Cuál es el periodo para la onda del minutero?

____

3. ¿Qué periodo tendrá la onda de la manecilla para las horas?

____

4. ¿Cuál es la frecuencia para el segundero del reloj o cuántas veces oscila en un segundo?

____

5. ¿Cuál es la frecuencia del minutero?

____

6. ¿Qué frecuencia tiene la manecilla de las horas?

____

Reto educativo

Instrucciones: reflexiona

1. ¿Cuál es la función senoidal que modela el movimiento del segundero del reloj?
2. ¿Del minutero del reloj?
3. Y ¿De la manecilla de las horas?

DESARROLLO

Las funciones trigonométricas

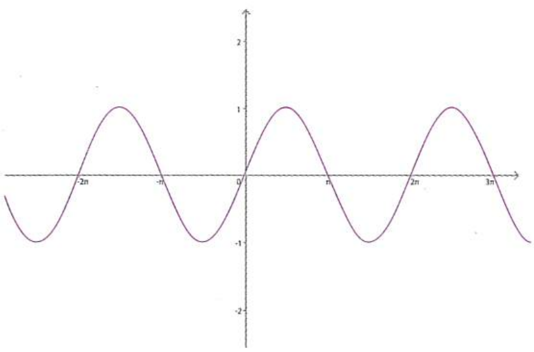
Las funciones trigonométricas son funciones muy utilizadas en las ciencias naturales para analizar fenómenos periódicos. Se llaman fenómenos periódicos a aquellos cambios que se repiten sucesivamente, siempre de idéntica forma, como por ejemplo: el movimiento circular uniforme, las vibraciones de un diapasón, las señales luminosas de un faro, etcétera. El más importante de ellos, es el movimiento vibratorio armónico simple, el cual constituye la base para la comprensión y el estudio de todos los fenómenos periódicos que se dan en la naturaleza. Al aplicar las funciones trigonométricas en los fenómenos periódicos, uno de los aspectos a tomar en cuenta es que los dominios sean los números reales. Ahora empecemos a hablar de ellas:

Función seno

La función seno es la función definida por: $f(x) = sen\,x$

Sus características son:

- **a.** $Dominio = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$
- **b.** $Codominio = \{y \mid y \in \mathbb{R}, -1 \leq y \leq 1\}$
- **c.** El *periodo* de la función *seno* es: 2π
- **d.** La función *seno es impar*, ya que:
  $sen(-x) = -sen\,x, \forall x \in \mathbb{R}$
- **e.** La gráfica de la función *seno* intercepta al *eje x* en los puntos cuyas abscisas son:
  $x = n\pi, \forall n \in \mathbb{Z}$
- **f.** El valor máximo de la función *seno* es: 1.
- **g.** El valor mínimo de la función *seno* es: -1.
- **h.** La amplitud de la función *seno* es: 1.



Función coseno

a. $Dominio = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$

b. $Codominio = \{y \mid y \in \mathbb{R}, -1 \le y \le 1\}$

c. El *periodo* de la función *coseno* es: 2π

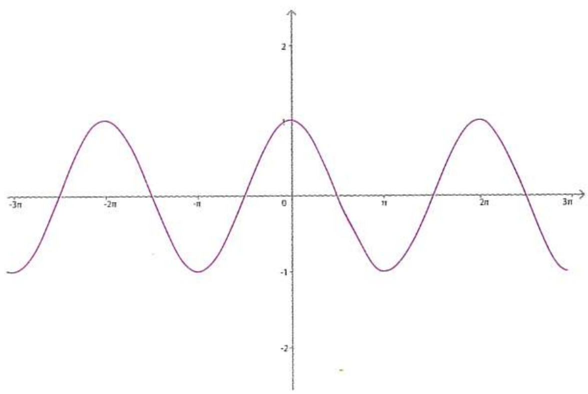
d. La función *coseno* es *par*, ya que:
$cos(-x) = \cos x, \forall x \in \mathbb{R}$

e. La gráfica de la función *coseno* intercepta al *eje x* en los puntos cuyas abscisas son:
$x = \frac{\pi}{2} + n\pi, \forall n \in \mathbb{Z}$

f. El valor máximo de la función *coseno* es: 1.

g. El valor mínimo de la función *coseno* es: -1.

h. La amplitud de la función *coseno* es: 1.



Función tangente

a. $Dominio = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$

b. $Codominio = \{y \mid y \in \mathbb{R}\}$

c. El *periodo* de la *función* es: π

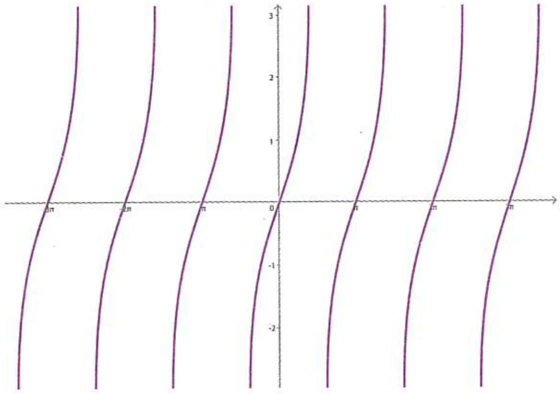
d. La función *coseno* es *par*, ya que:
$cos(-x) = \cos x, \forall x \in \mathbb{R}$

e. La gráfica de la función *coseno* intercepta al *eje x* en los puntos cuyas abscisas son:
$x = \frac{\pi}{2} + n\pi, \forall n \in \mathbb{Z}$

f. El valor máximo de la función *tangente* es: $-\infty$

g. El valor mínimo de la función *tangente* es: $+\infty$

h. La amplitud de la función *tangente* es: °



Se completa las funciones trigonométricas con: cotangente, secante y cosecante. También son funciones periódicas pero que comúnmente no se utilizan para modelar fenómenos periódicos.

Transformación de gráficas de funciones trigonométricas

Las reglas para desplazar, dilatar, contraer, reflejar, etcétera que se pueden aplicar a las funciones trigonométricas las podemos observar en el siguiente diagrama:

$A>0$: ampliación o reducción vertical.
$A<0$: reflexión respecto del eje x.

Desplazamiento vertical

$$y=Af\,(Bx + C) + D$$

Desplazamiento horizontal

$B>0$: ampliación o reducción horizontal
$B<0$: reflexión respecto del eje y.

Funciones sinusoidales

Son funciones relacionadas con las funciones seno y coseno:

$$y = A\,sen(Bx + C) + D \qquad\qquad y = A\cos(Bx + C) + D$$

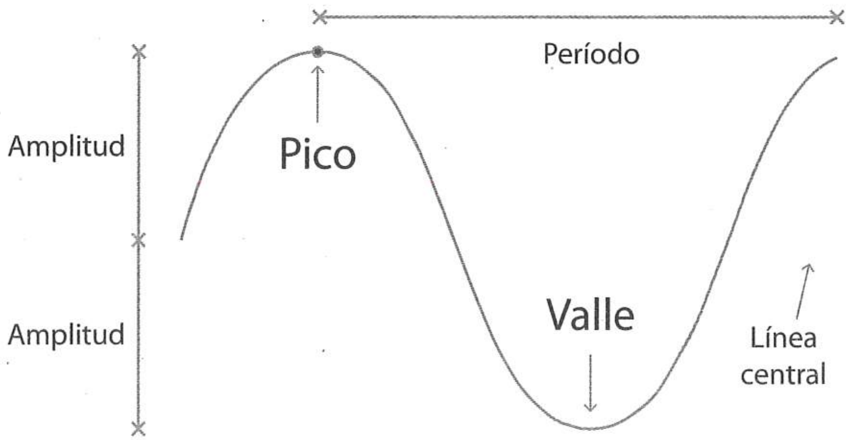
O una combinación de estas.

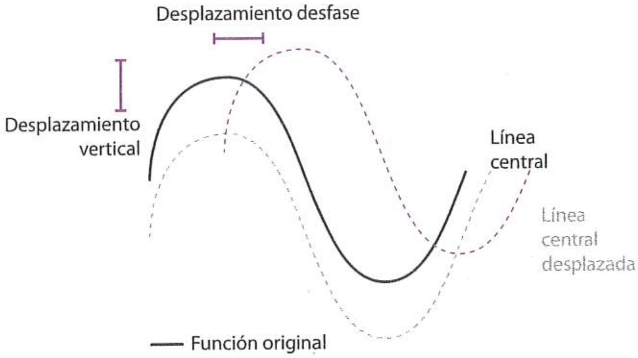
Las gráficas de estas funciones se pueden obtener a partir de las gráficas de las funciones $y = sen\,x$ o $y = \cos x$, considerando que $B > 0$.

Características de las gráficas sinusoidales

- AMPLITUD ($|A|$): Es la altura desde la línea central hasta el pico o valle. Por lo tanto, se utiliza el valor absoluto.
- PERIODO $\left(\frac{2\pi}{B}\right)$: Es la longitud entre un pico y otro, o entre un valle y otro.
- DESFASE $\left(-\frac{C}{B}\right)$: Es cuando la función se desplaza horizontalmente de su posición original.
- DESPLAZAMIENTO VERTICAL (D): Es cuando la función se desplaza verticalmente de su posición original. Podemos tomar como referencia la línea central.

No hay que olvidar que el eje x tiene como unidades los radianes, no los grados sexagesimales, y que hay 2π radianes en una vuelta completa.





Ejemplo 2

Grafica la función $y = -3\,sen\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$

Solución

Dada la función $y = -3\,sen\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$, sabemos que

$A = 3; B = 2; C = \frac{1}{3}\pi \; y \, D = 0$

Por analogía con $y = A\,sen\left(Bx + C\right) + D$

Entonces la amplitud es: $|A| = |-3| = 3$

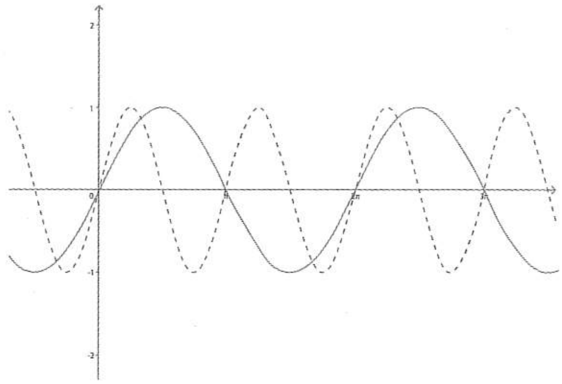
El periodo es: $\frac{2\pi}{B} = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

El desfase es: $-\frac{C}{B} = -\frac{-\frac{1}{3}\pi}{2} = \frac{\pi}{6}$.

Ahora observa la construcción de esta gráfica a partir de la función $y = sen\,x$:

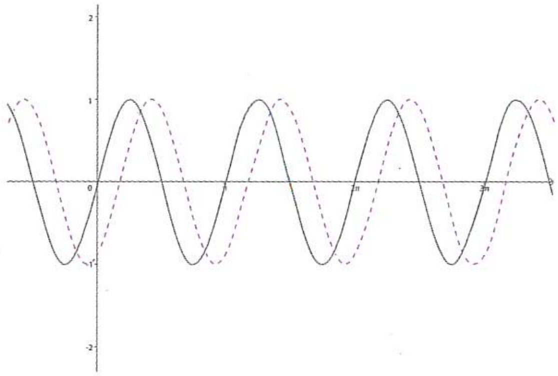
Primer paso: graficamos la función $y = sen(2x)$.

Se ve en la gráfica que, ahora la figura aparece dos veces en lo que la original aparece una vez



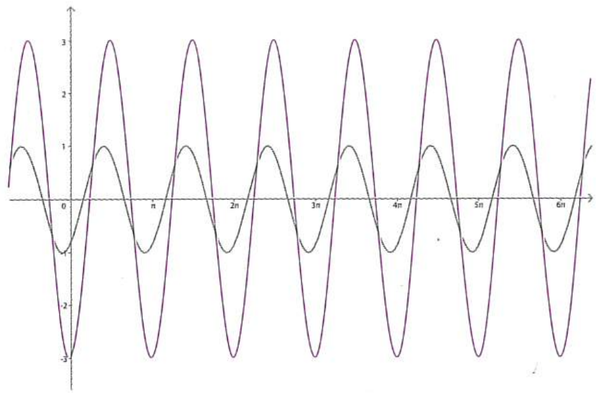
Segundo paso: graficamos la función $y = sen\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$.

En la gráfica observamos el desfase que es de $\frac{\pi}{6}$.



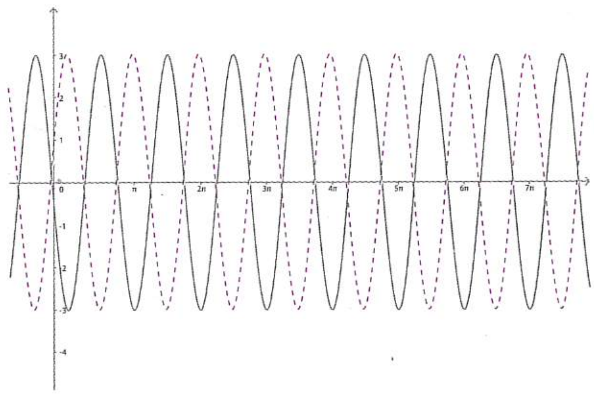
Tercer paso: graficamos la función $y = 3sen\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$.

En la gráfica se observa cómo crece la amplitud 3 veces.

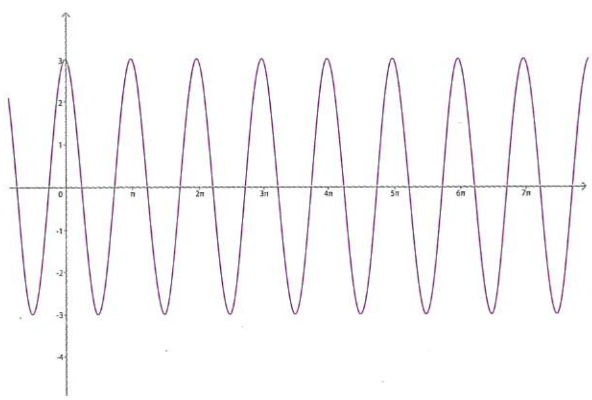


Cuarto paso: graficamos la función $y = -3\,sen\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right)$.

Se observa cómo se refleja la gráfica respecto al *eje x*, es decir, lo que antes estaba arriba ahora se encuentra abajo.



El resultado es:



Reto educativo 1

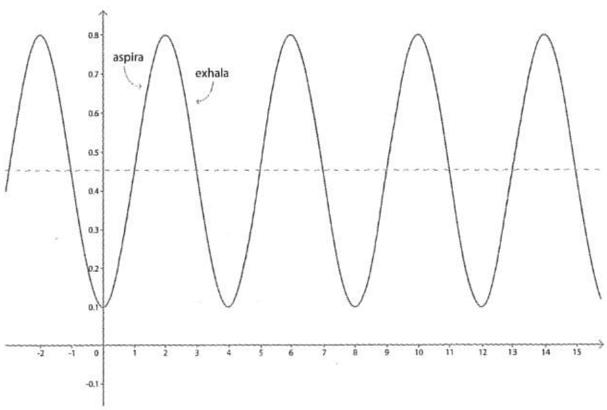
Instrucciones: halla la amplitud, el periodo, el desfase y los desplazamientos vertical y horizontal de cada función y grafícalas. Te sugerimos utilizar GeoGebra.

1. $y = -\cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$
2. $y = -2sen(3x - \pi) + 1$
3. $y = 4\cos(x + 2\pi) - 2$
4. $y = 2sen\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$
5. $y = -\frac{1}{2}sen\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2$

Aplicaciones de la funciones sinusoidales

Ejemplo 3

Si el volumen V de aire en los pulmones al respirar (aspirar y exhalar) se puede determinar mediante una función de la forma: $V(t) = A\cos(Bt + C) + D$, encuentra la función correspondiente a la siguiente onda graficada.



Solución

Observando la gráfica, vemos que la persona aspira y exhala 0.7 litros de aire cada 4 segundos. Así que el periodo de este fenómeno periódico es: $P = 4$ y como $P = \frac{2\pi}{B}$.

Entonces $B = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

La amplitud de la onda es la longitud que hay entre la línea central y el pico:

$$Amplitud = valor\ máximo - linea\ central$$

Por lo tanto, $A = 0.8 - 0.45 = 0.35$

Se observa que el desfase es de 2 segundos. Recuerda que la función coseno inicia en un pico de onda y el primer pico se encuentra a 2 segundos. Y no olvidemos que ya sabemos el valor de $B = \frac{\pi}{2}$, por lo tanto:

$$Desfase = -\frac{C}{B}$$

$$2 = -\frac{C}{\frac{\pi}{2}}$$

Despejando C:

$$C = -\pi$$

Para encontrar el desplazamiento vertical nos apoyamos en la línea central y esta se ubica en $y = 0.45$, por lo que:

$$Desplazamiento\ vertical = D = 0.45$$

Así que la función que corresponde a la onda graficada es:

$$V(t) = A\cos(Bt + C) + D$$

Sustituyendo: $A = 0.35$, $B = \frac{\pi}{2}$, $C = -\pi$ y $D = 0.45$

Resulta:

$$V(t) = 0.35\cos\left(\frac{\pi t}{2} - \pi\right) + 0.45$$

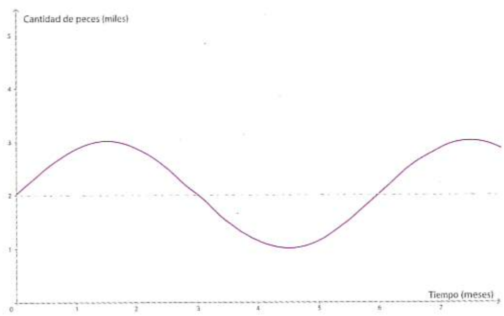
CIERRE

Reto educativo

Instrucciones: resuelve los siguientes problemas.

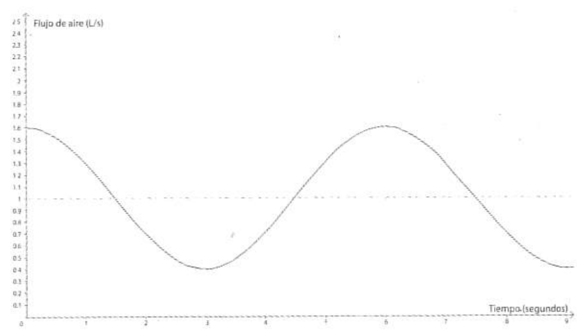
1. La siguiente gráfica muestra el comportamiento de una población de peces en un estanque durante un lapso. ¿Cuál es la cantidad máxima de peces en el estanque durante seis meses? ¿Cuál es la cantidad mínima de peces en el estanque durante seis meses? ¿Cuantos meses se repite el fenómeno periódico de aumento y disminución de peces en el estanque?

Determina la función sinusoidal que representa este fenómeno periódico.



2. La siguiente gráfica muestra el proceso rítmico de la respiración de un roedor durante un tiempo t en segundos. ¿Cada cuánto se lleva a cabo un ciclo de respiración del roedor? ¿Cuál es la capacidad máxima y mínima de aire que tiene el roedor?

Determina la función sinusoidal que representa este fenómeno periódico.



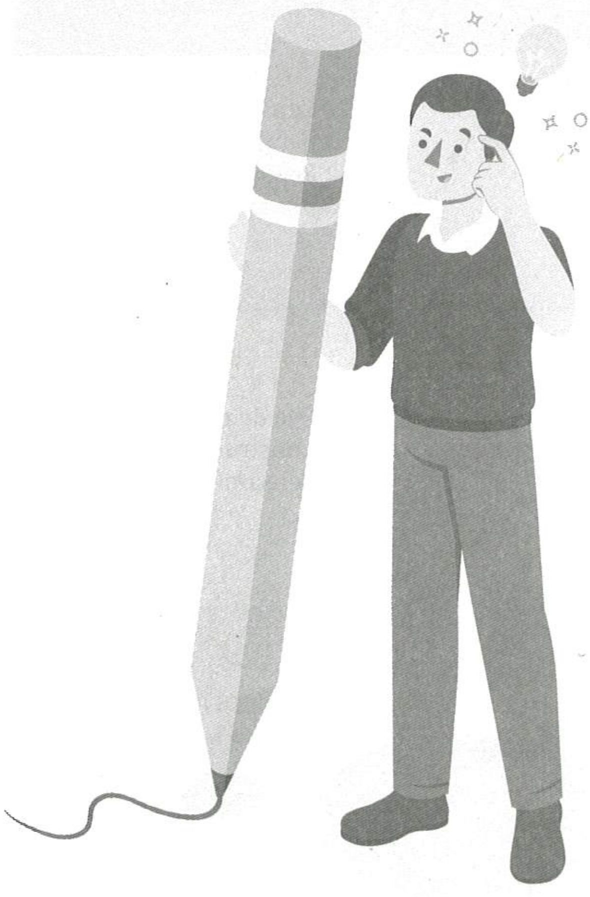
Reto educativo

3. Un generador de corriente alterna produce a los *t* segundos una corriente en amperes dada por la función $I(t) = 3sen\left(120\pi - \frac{\pi}{2}\right) + 16$. ¿Cuál es el periodo?

   ¿Y su frecuencia? ¿Cuál es su desface? ¿Cuáles son las corrientes máxima y mínima que puede generar? Grafica la función.

4. Si el máximo y el mínimo voltaje E en voltios en un circuito eléctrico son de *132 V y 108 V,* respectivamente, y tiene una frecuencia de *60 Hz*. Determina una función sinusoidal de la forma $E(t) = A\cos(Bt + C) + D$ que proporcione el voltaje en el circuito en cualquier tiempo t medido en segundos. ¿Cuál es el voltaje en el circuito a los 3 segundos? ¿y a los dos minutos?

5. Un péndulo simple de 26 cm de longitud empieza a oscilar después de que se lleva hacia la derecha de la posición de equilibrio O, a la posición de inicio I, formándose un ángulo de 36°. Si se registran 30 oscilaciones en 5 segundos, calcula la elongación del péndulo a los 2 segundos de soltar el péndulo.



Tesoro digital

En este video se habla sobre el péndulo simple:

https://youtu.be/y5B6FCJlK9M?si=8My0EP1GptmU7kHZ

PROGRESIÓN 14

Selecciona una problemática, situación o fenómeno

HORAS: 4

Aprendizaje esperado: Selecciona una problemática, situación o fenómeno tanto real como ficticio para modelarlo utilizando funciones derivables.

Metas	Categorías, conceptos transversales	Subcategorías, conceptos cientificos asociados
M2: Argumenta a favor o en contra de afirmaciones acerca de situaciones, fenómenos o problemas propios de la matemática, de las ciencias o de su contexto.	**C2** Procesos de intuición y razonamiento.	**S1** Capacidad para observar y conjeturar. **S2** Pensamiento intuitivo. **S3** pensamiento formal.
M2: Construye un modelo matemático, identificando las variables de interés, con la finalidad de explicar una situación o fenómeno y/o resolver un problema tanto teórico como de su entorno.	**C3** Solución de problemas y modelación.	**S1** Uso de modelos. **S2** Construcción de modelos. **S3** pensamiento formal.
M3: Organiza los procedimientos empleados en la solución de un problema a través de argumentos formales para someterlo a debate o a evaluación.	**C4** Interacción y lenguaje matemático.	**S2** Negociación de significados. **S3** Ambiente matemático de comunicación.

APERTURA

Reto educativo

Instrucciones: reflexiona y contesta:

P	G	R	A	F	I	C	A	A	Q	F	R	A	X
O	J	C	T	Y	W	U	I	P	D	S	A	M	X
L	W	H	R	A	O	W	N	R	E	N	H	K	F
I	D	U	A	N	S	I	D	O	P	L	N	E	U
N	U	R	S	J	E	C	E	X	E	O	I	X	N
O	S	F	C	D	C	R	P	I	N	G	N	P	C
M	C	V	E	E	O	A	E	M	D	A	F	O	I
I	R	A	N	R	N	C	N	A	I	R	I	N	O
A	E	R	D	I	T	I	D	C	E	I	N	E	N
L	T	I	E	V	I	O	I	I	N	T	I	N	R
G	A	A	N	A	N	N	E	O	T	M	T	C	T
R	A	B	T	D	U	A	N	N	E	I	O	I	B
X	B	L	E	A	A	L	T	Q	J	C	U	A	U
G	I	E	C	I	N	T	E	G	R	A	L	L	X

Aproximación	Continua
Dependiente	Derivada
Discreta	Exponencial
Función	Gráfica
Independiente	Infinito
Integral	Logarítmica
Polinomial	Racional
Trascendente	Variable

DESARROLLO

¿Qué es una ecuación diferencial?

Es una ecuación que involucra a las derivadas de una función con la propia función y/o las variables de las que depende. También se dice que las ecuaciones diferenciales son ecuaciones que explican cualquier función con sus derivadas. Se usan para describir la forma en que las cosas cambian con el tiempo, ayudándonos a hacer predicciones y tener en cuenta tanto las condiciones iniciales como la evolución de las variables.

Ejemplo 1

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+y=x^3$$

$$\sqrt{1-\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)}-y=0$$

$$\frac{d^4x}{dt^4}=xt$$

Si una ecuación implica la derivada de una variable con respecto de otra, entonces la primera se llama una variable dependiente y la segunda independiente. Así en la ecuación:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+y=x^3$$

x es la variable independiente y y es la variable dependiente.

Ejemplo 2

$$\sqrt{1-\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)}-y=0$$

t es la variable independiente y y es la variable dependiente.

Una ecuación diferencial, que solo implica derivadas ordinarias con respecto de una sola variable independiente, es una ecuación diferencial ordinaria (EDO). Una ecuación diferencial que implica derivadas parciales con respecto a más de una variable independiente es una ecuación diferencial parcial (EDP)

$$\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=x-2y$$

Es una ecuación diferencial parcial, donde x y y son variables y u es una variable dependiente.

El orden de una ecuación diferencial es el orden de las derivadas de orden máximo que aparecen en la ecuación.

La ecuación $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+x\dfrac{dy}{dx}+y=x^3$ es de segundo orden, la ecuación $\dfrac{d^4x}{dt^4}=xt$ es de cuarto orden y $\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial y}=x-2y$ es de primer orden.

Modelación de una ecuación diferencial

Estudiaremos unos problemas del mundo real que involucran ecuaciones diferenciales, a través de estos problemas introduciremos la idea de ecuación diferencial como modelo matemático. Los problemas por estudiar tienen como objetivo presentar el análisis que debemos hacer al intentar modelar un problema usando ecuaciones diferenciales y no con el propósito de resolver el problema mismo, pues resolverlo significa determinar las soluciones de las ecuaciones diferenciales que surjan y eso se verá más adelante, en la universidad.

Propagación de una enfermedad contagiosa

Modelaremos la propagación de una enfermedad contagiosa a través de una comunidad de personas que han estado en contacto con personas enfermas.

En primer lugar, definimos a $x(t)$ como el número de personas que están enfermas en un cierto tiempo t, siendo $y(t)$ el número de personas que aún no han sido expuestas al contagio en ese momento t.

Es claro que la razón $\dfrac{dx}{dt}$ con la que se propaga la enfermedad debe ser proporcional al número de encuentros o interacciones entre los dos grupos de personas. Si suponemos que el número de interacciones es conjuntamente proporcional a $x(t)$ y $y(t)$, entonces un modelo puede ser:

$$\frac{dx}{dt}=cxy$$

Donde c es la constante de proporcionalidad. Consideremos una comunidad con una población fija de n personas, si inicialmente nadie tiene la enfermedad entonces $y=n$, pero si a esa comunidad llega una persona enferma $x=1$, entonces podemos construir la siguiente relación.

$$x+y=n+1$$

De donde podemos despejar a y como:

$$y = n + 1 - x$$

Y sustituir en el modelo:

$$\frac{dx}{dt} = cx(n + 1 - x)$$

Esta última ecuación sería el modelo que describe la propagación de la enfermedad a través del tiempo. Una condición inicial sería que en el momento en el que llegó la persona enferma a la comunidad comenzó a propagarse la enfermedad, esto es $x(0) = 1$.

Cuerpos en caída

Un objeto es lanzado desde lo alto de un edificio, en esta problemática lo que buscamos hallar es la posición del objeto con respecto al suelo en un tiempo t después de ser lanzado y antes de chocar en el suelo.

Al empezar el análisis, tomemos en cuenta algunas consideraciones:

- la dirección hacia arriba, en la que es lanzado el objeto, es positiva;
- la altura del edificio es r_o;
- el objeto tiene una masa m;
- la velocidad inicial con la que es lanzado el objeto es v_o.

Ya que planteamos esas consideraciones, ahora vamos a empezar con el análisis:

Cuando el objeto cae, este se encuentra sometido a la fuerza de gravedad. Tomando en cuenta la segunda ley de Newton sabemos que la fuerza neta F es proporcional a su aceleración a, esta es su ecuación:

$$F = ma$$

Si el objeto está en caída, la fuerza será su peso W:

$$F = -W$$

El signo negativo del peso indica que es una fuerza dirigida hacia abajo. Ahora, recordemos que el peso está definido con la ecuación:

$$W = mg$$

Donde g es la aceleración debido a la gravedad de la tierra. Aplicando la segunda ley de Newton, tenemos:

$$F = ma = -mg = -W$$

Es decir, $a = -g$. Ahora lo importante, la aceleración de un objeto corresponde a la tasa de cambio de la velocidad con respecto al tiempo y que a su vez la velocidad es la tasa de cambio de la posición del objeto respecto al tiempo, entonces:

$$a(t)=\frac{dv}{dt}=\frac{d\left(\frac{dr}{dt}\right)}{dt}=\frac{d^2r}{dt^2}$$

Si $r(t)$ es la posición del objeto, se tiene:

$$\frac{d^2r}{dt^2}=r''(t)$$

La ecuación que modela nuestro problema es:

$$r''(t)=-g \text{ o } \frac{d^2r}{dt^2}=\ddagger g$$

Las condiciones iniciales son:

- Tiempo $t=0$, el objeto se encuentra en la posición más alta en el edificio, es decir $r(0)=r_o$.
- La velocidad con la que es lanzado el objeto, al tiempo $t=0$ es $v(0)=r'(0)=v_o$.

Resolviendo la ecuación diferencial y obteniendo la solución particular podremos predecir la posición del objeto con respecto al suelo a cualquier tiempo t antes de caer por completo.

CIERRE

Reto educativo

Instrucciones: reúnete en equipo e investiguen qué otros ejemplos de modelos matemáticos con ecuaciones diferenciales existen. Expongan ante su grupo los casos encontrados.

Sugerencias: modelo cazador-presa, crecimiento poblacional, crecimiento bacteriano, ley de enfriamiento de Newton, el péndulo simple, etc.

Tesoro digital

En este video se explica el modelo cazador-presa: https://youtu.be/5Y-ozVMn-r9I?si=3Tud2w84w5q9IaEa

Tesoro digital

En este video se explica el modelo de mezcla, problema de química:

https://youtu.be/Gxxpzflaomc?si=Lo2JB-5TkGAS0061

Tesoro digital

En este otro video se explica el modelo de propagación de una enfermedad: https://youtu.be/xr3m0q7a-SI0?si=Amorg2uim2dmJ6J5

PROGRESIÓN 15

Considera y revisa algunas ideas

HORAS: 3

...subyacentes al teorema fundamental del cálculo.

Metas

M4: Argumenta a favor o en contra de afirmaciones acerca de situaciones, fenómenos o problemas propios de la matemática, de las ciencias o de su contexto.

Categorías, conceptos transversales

C2 Procesos de intuición y razonamiento.

Subcategorías, conceptos científicos asociados

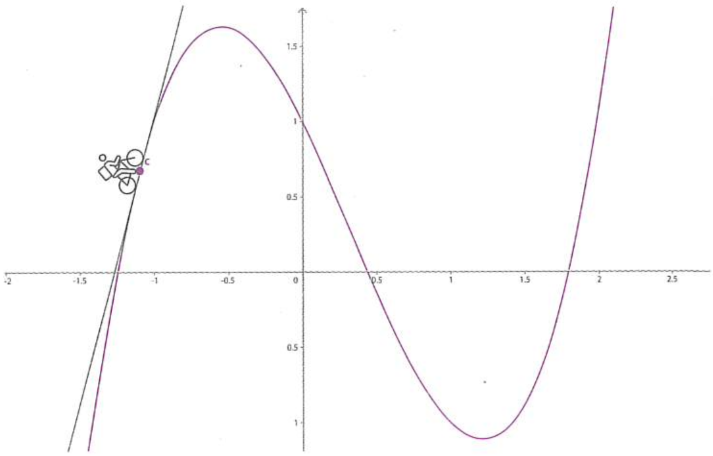
S1 Capacidad para observar y conjeturar.
S2 Pensamiento intuitivo.
S3 pensamiento formal.

APERTURA

Hasta este punto hemos relacionado la curva con la recta tangente.

Aprendimos que una manera de estudiar las curvas es a través de las rectas tangentes.

Esto nos lleva a la primera derivada, cuando somos capaces de encontrar la velocidad instantánea en un punto determinado.



Reto educativo

Instrucciones: responde a las siguientes preguntas.

1. ¿Qué nombre recibe la recta?

____

2. ¿Qué tipo de función está representando la curva?

____

3. ¿El cálculo de la primera derivada nos da información sobre?

____

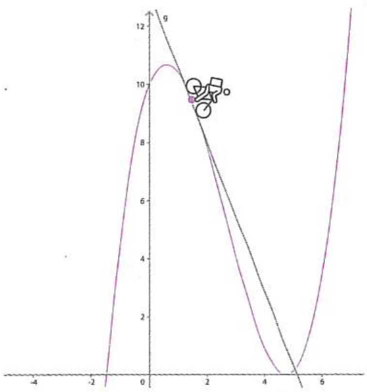
DESARROLLO

Primera derivada o velocidad instantánea

Acercarnos a un punto dada una función nos permite encontrar lo que sucede en ese instante, ya sea que dependa del tiempo, de las ventas o de otra variable que la determine. También somos capaces de observar e identificar los máximos y mínimos, incluso de analizar la concavidad y los puntos de inflexión.

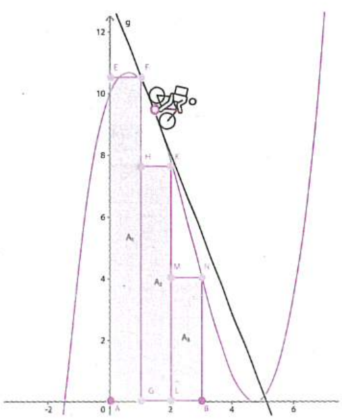
Y todo ello contribuye al estudio de la derivada.

Por lo tanto, ahora concluimos que una curva contiene muchas características que la definen y que para estudiarla nos hemos apoyado de la recta tangente y secante.



Área bajo la curva desde el punto A al punto B

Ahora intentemos calcular el área que se cubre bajo la curva del punto A al punto B, una idea que pudiera ayudar basados en lo que conocemos es trazar alguno rectángulos cuya área sea base por altura.



Entonces podríamos calcular el área de cada rectángulo y al final sumar las áreas.

A1+A2+A3 y nos daría un valor aproximado.

Aunque con tal cantidad de rectángulos no sería precisa el área bajo la curva pues por encima de cada rectángulo hay espacios vacíos.

¿Qué propones hacer basado en este proceso?

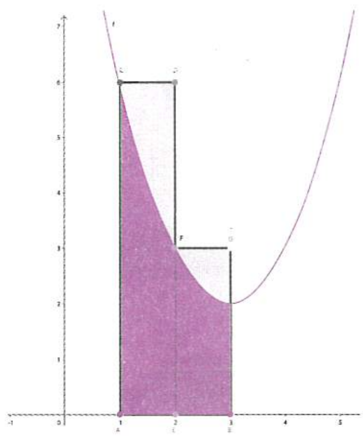
Una idea es hacer más rectángulos y más pequeños que cubran la mayoría de la curva, para enseguida calcular el área y sumarla.

Esta misma idea tuvo Riemann y le llamó así, la suma de Riemann.

Ejemplo 3

Al trazar de otra manera los rectángulos ahora hay un sobrante por la parte superior y no proporciona el área buscada.

Este fue el otro enfoque del cálculo, encontrar el área bajo la curva, dado que existen muchas situaciones que requieren de su cálculo.



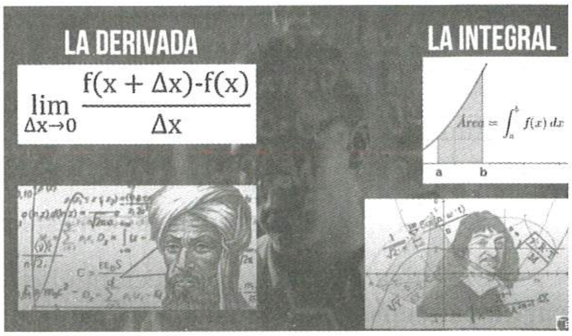
Hemos llegado también al momento en el cual podemos concluir que tanto la derivada como la integral tienen mucho que ver entre ellas.

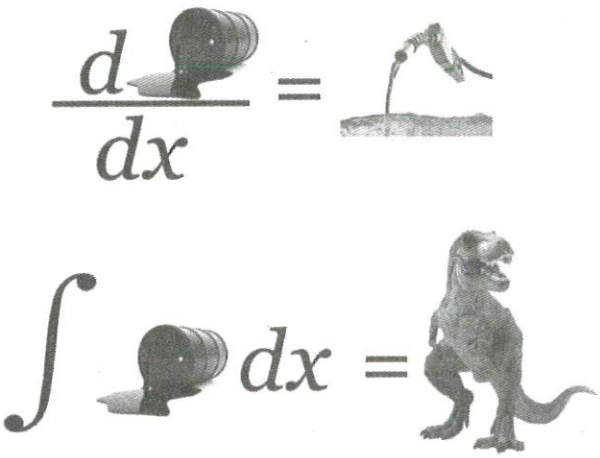
Llegamos al punto de comprender que la derivada y la integral son herramientas súper poderosas y nos toca acercarnos a ellas para ir identificando su presencia en nuestra vida cotidiana, en fenómenos como el internet, el aumento o disminución de las poblaciones, el peso de los productos que se siembran y muchísimas más aplicaciones.

Tesoro digital

Toma tu tiempo para revisar el QR, te va a gustar encontrar las múltiples aplicaciones que tiene.

https://www.youtube.com/watch?v=egUrDZJ1GSY





La derivada es recíproca de la integral y viceversa

Ambas podemos verlas en una misma función y se puede estudiar al mismo tiempo sabiendo la información que nos aporta.

Es momento de culminar nuestro semestre con algunos ejercicios solo de reflexión.

CIERRE

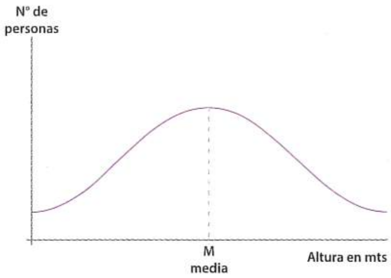
Reto educativo

Instrucciones: reúnete para trabajar en grupo y poder mencionar algunos ejemplos sobre la aplicación del cálculo del área bajo la curva en la distribución normal en probabilidad y en un dibujo del cuento de *El Principito.*

Solo recuerda que la probabilidad de que un evento suceda se calcula mediante el área bajo la curva.

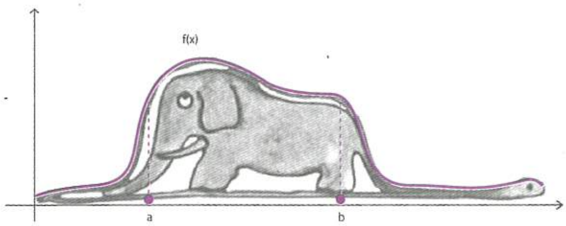
Reto educativo

a. La altura en hombres de los grupos de tercer semestre de tu plantel.



b. Las calificaciones del primer parcial de Pensamiento matemático III en los estudiantes de tu plantel.

c. En la lectura y dibujo de *El Principito*, dada la curva f(x), calcula el área bajo la curva que ocupa el elefante. Elabora tu propuesta y comparte con tus compañeros.



BIBLIOGRAFÍA

Bibliográficas

- Aguilar, A., Bravo , F. V., Gallegos, H. A., Cerón, M., & Reyes, R. (2015). Matemáticas simplificadas. Pearson.
- Basto, J. R. (2007). Matemáticas IV. Patria.
- Bosh, D., Guerra, I., Hernández, D., & De Oteyza, M. (2004). Cálculo diferencial e integral. Publicaciones CULTURALES.
- Carvajal, J. A. (2027). Matemáticas V. McGraw-Hill Interamericana.
- Douglas, J., & DeFranza, J. (2001). Precálculo. International Thomson Editores.
- Fernández, E. (enero, 2009). "¿Cuál es la longitud total de los vasos sanguíneos?" Recuperado de https://www.muyinteresante.com/curiosidades/12375.html , en abril de 2024.
- Ibáñez, P., & García , G. (2009). Matemáticas i. Aritmética y álgebra. Cengage Learning.
- Larson, E. (2005). Cálculo diferencial e integral. McGraw-Hill.
- Leithold, L. (1988). Cálculo Para Ciencias Administrativas, Biológicas y Sociales. Alfaomega Grupo Editor.
- Martínez de la Rosa, F. (Junio de 2009). La recta tangente: notas históricas y actividades para el aula. SUMA Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. 61, 7-15.
- Mochón, S. (1994). Quiero entender el cálculo. Un enfoque diferente basado en conceptos y aplicaciones. Grupo Editorial Iberoamericano.
- Ron Larson, R. P. (2005). Cálculo diferencial e integral. McGraw-Hill Interamericana.
- Swokowski, E. W., & Cole, J. A. (2011). Álgebra y trigonometría con geometría analítica. Cengage Learning.
- Zill, D. (1987). Cálculo con Geometría Analítica. Grupo Editorial Iberoamericano.

- GOBIERNO DEL ESTADO -

COBAO

OAXACA
GOBIERNO DEL ESTADO